Chapitre I

Calculs numériques et algébriques

I. Opérations élémentaires

1. Opérations sur les nombres

Addition et multiplication

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels possède deux opérations dont les propriétés sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Addition	Propriétés	Multiplication
$\begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a;b) \mapsto a+b \end{cases}$	lois internes	$\begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a\,;b) \mapsto a\times b \end{cases}$
$(a+b)+c = a+(b+c)$	lois associatives	$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$
$a+b=b+a$	lois commutatives	$a\times b = b\times a$
0 est neutre : $a + 0 = a$	éléments neutres	1 est neutre : $a \times 1 = a$
Tout a a un **opposé, noté $-a$** : $a+(-a)=0$	éléments symétriques	Tout $a \neq 0$ a un **inverse, noté $\frac{1}{a}$** : $a\times\dfrac{1}{a}=1$
La multiplication est distributive par rapport à l'addition $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$		

Le produit de deux nombres réels de même signe est positif.
Le produit de deux nombres réels de signes contraires est négatif.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

La soustraction et la division

La **soustraction** de deux nombres a et b est définie de la manière suivante :

$$a-b=a+(-b)$$

La **division** d'un nombre a par un nombre b non nul est définie par :

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Ainsi, nous n'aurons plus à traiter spécifiquement ces deux opérations, que nous verrons au travers de l'addition et de la multiplication.

Priorités opératoires

Dans une succession de calculs, on calcule dans l'ordre :

1. Dans les parenthèses.
2. Les puissances.
3. Les multiplications et divisions (de gauche à droite).
4. Les additions et soustractions (de gauche à droite).

Comparaison

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leq$, compatible avec l'addition et la multiplication. On a alors les propriétés suivantes :

Soient *a, b, c* et *d* des réels.
Si $a \leq b$ *et* $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
Si $a \leq b$ et si $c \geq 0$ alors $a \times c \leq b \times c$

Division euclidienne

Théorème et définition

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver l'unique couple d'entiers naturels *(q ; r)* vérifiant les relations :

$$\mathrm{a} = \mathrm{bq} + \mathrm{r}\ ;\ \ \mathrm{r} < b$$

On dit que a est le **dividende**, b est le **diviseur**, q est le **quotient** et r **le reste** de cette division euclidienne.

Cette relation peut se mettre aussi sous la forme (q étant le même, dans les deux formules) :

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique entier q vérifiant : $bq \leq a < b(q+1)$

Calculs avec les fractions

Soient a, b, c et d des entiers relatifs, avec b et d non nuls.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}\ (c \neq 0)$$

Produit en croix

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c\ (b \neq 0\ ; d \neq 0)$$

2. Avec les puissances et les racines carrées

Les puissances

Définitions

Si $n > 0$, $a^n = a\times a\times \ldots\times a$ (n fois le facteur a)

$$a^{-n} = \frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\times \ldots \times\frac{1}{a} \text{ (} n \text{ fois le facteur } \frac{1}{a}\text{)}$$

Avec a et b deux réels non nuls et (n, m) deux entiers relatifs.

Les règles de calcul sont les suivantes :

$$0^n = 0 \ (n \neq 0) \qquad 1^n = 1 \qquad a^0 = 1 \qquad 0^0 \ n'existe\ pas$$

$$a^n\times a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m} \qquad (a\times b)^n = a^n\times b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Les identités remarquables

Soient a et b deux réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Calcul avec les racines carrées

Soient a et b deux réels positifs.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (b \neq 0)$$

⚠ *Remarque importante* : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Écriture scientifique

Définition

On dit que le nombre est écrit sous forme **d'écriture scientifique** lorsque le nombre est écrit sous la forme du produit d'un nombre décimal de partie entière comprise entre 1 et 9 et d'une puissance de 10.

II. Les techniques opératoires

1. L'addition

La technique usuelle consiste à effectuer les additions rang d'unité par rang d'unité (les unités entre elles, les dizaines entre elles, etc.) en utilisant une disposition en colonne. On place le résultat sous la barre d'addition dans le rang qui convient, d'où les retenues : si je trouve plus de 10 unités (par exemple 15) en ajoutant les unités des 2 nombres, je pose le chiffre des unités du résultat, et je retiens le chiffre des dizaines. Il vient s'ajouter aux dizaines des deux autres nombres (je pose 5 et je retiens 1).

2. La soustraction

Il existe plusieurs techniques opératoires. Nous allons ici décrire les trois les plus fréquemment utilisées, que l'on trouve dans le document d'accompagnement « le nombre au cycle 2[1] ».

La technique dite « traditionnelle »

C'est celle que vous avez peut-être apprise étant petit(e). Prenons un exemple :

Exemple

$$\begin{array}{rccc} & 1 & {}_1 1 & {}_1 7 \\ - & {}_1 & 3_1 & 8 \\ \hline & & 7 & 9 \end{array}$$

La « chanson » dit : *8 ôté de 7, impossible. Je mets une retenue en haut, et pour compenser, une retenue en bas. Ensuite, je calcule 17 – 8 qui donne 9. La retenue du bas s'ajoute au 3 des dizaines du nombre du bas. 4 ôté de 1 impossible. Je mets une retenue en haut, une retenue en bas. Je calcule 11 – 4 = 7. Enfin, aux centaines, 1 – 1 donne 0. Le résultat est donc 79.*

Cette technique repose en fait sur la propriété : si $a, b,$ et c sont trois nombres réels, $a - b = (a + c) - (b + c)$, le c désignant ce qu'on a appelé retenue (par abus de langage). Cette propriété ne sera évidemment pas enseignée ainsi, mais sera utilisée « en actes ».

La technique dite « naturelle »

Exemple

$$\begin{array}{rccc} & & 10 & \\ & & 0 & 17 \\ & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} \\ - & & \cancel{3} & 8 \\ \hline & & 7 & 9 \end{array}$$

7 ôté de huit, impossible. On « casse » une dizaine, qui donne 10 unités : on barre le 1 des dizaines de 117 les unités deviennent 17 (7 + 10), les dizaines 0. On calcule 17 – 8 donne 9. Aux dizaines 0 – 3 est impossible…

1. http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

Cette technique est plus simple à comprendre que la précédente, car elle repose uniquement sur le fait que 1 centaine = 10 dizaines, et 1 dizaine = 10 unités.

Technique de « l'addition à trou »

Enfin, au début de l'apprentissage, ou suivant la présentation du problème, les élèves calculent ce qu'on appelle une « addition à trou ».

Exemple

De *8 pour aller à 7, impossible. De 8 pour aller à 17, il faut 9. On écrit donc 9 aux unités, et l'addition donnera donc une retenue aux dizaines. 3 + 1 donne 4, il faut donc 7 pour aller à 11. Le résultat est donc 79.*

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 8 \\ + & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & 1 & 7 \end{array}$$

Cette technique est « simple » sur le plan calculatoire, mais pour l'utiliser, les élèves doivent avoir compris l'équivalence entre la soustraction et la recherche d'un complément : $a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$.

3. La multiplication

Nous présentons ici la technique opératoire dite « en colonne » ou « à la française », elle est basée sur la décomposition d'un nombre en puissances de 10 ainsi que les propriétés de la multiplication.

Exemple

$$35{\times}8 = (30 + 5){\times}8 = 30{\times}8 + 5{\times}8$$

	35	
×	8	
	40	← 8 × 5
+	240	← 8 × 3 × 10
	280	← 8 × (5 + 30)

	107	
×	306	
	642	← 6 × 107
	0	← ligne facultative
+	32100	← 3 × 107 × 100
	32742	← 107 × (6 + 300)

4. La division euclidienne

Soit à effectuer la division euclidienne d'un entier D par un entier non nul d. Nous cherchons à déterminer le quotient q ainsi que le reste r.
Nous allons chaque fois faire fonctionner la technique sur un exemple, en effectuant la division euclidienne de 1280 par 24.
Les principales étapes de la réalisation de la technique opératoire de la division, que l'on nomme aussi **algorithme de la division euclidienne**, sont :
(1) Recherche du nombre de chiffre du quotient, par encadrement du dividende D par des multiples « ronds » du diviseur d : on cherche l'entier n tel que $d{\times}10^n \leq D < d{\times}10^{n+1}$
$n + 1$ correspond alors au nombre de chiffre du quotient.

Exemple

$24 \times 10 < 1280 < 24 \times 100$ donc le quotient cherché est un nombre à 2 chiffres (car il est compris entre 10 et 100).

(2) Création du répertoire multiplicatif du diviseur : c'est la « table du diviseur ».

Exemple

$24 \times 1 = 24$; $24 \times 2 = 48$; $24 \times 3 = 72$; $24 \times 4 = 96$; $24 \times 5 = 120$…

(3) Création d'un tableau de numération au quotient dans la potence :

d	u

(4) Recherche du premier chiffre du quotient, en déterminant un dividende partiel et s'aidant du répertoire multiplicatif pour effectuer la division euclidienne de ce dividende partiel par le diviseur.

Exemple

1 280	24	
	d	u
	5	

Le premier dividende partiel est 128 et le chiffre des dizaines du quotient est 5 car en utilisant le répertoire multiplicatif on voit que $24 \times 50 < 1\,280 < 24 \times 60$

(5) Soustraction du premier multiple du diviseur au dividende partiel (on prendra garde de bien faire comprendre que la place de chacun des chiffres dans cette technique dépend de « zéros » pour la plupart non écrits).

Exemple

1280	24
– 120	5
80	

$24 \times 5 = 120$

donc on pose $128 - 120 = 8$

(6) Création du nouveau dividende partiel, en abaissant le chiffre suivant.

(7) Réitération de la recherche du chiffre du quotient (étape (4), jusqu'à ce que le reste soit plus petit que le diviseur.

Exemple

1280	24
– 120	53
80	
– 72	
8	

On peut donc conclure : $1280 = 24 \times 53 + 8$,

et on a bien $8 < 53$.

La division euclidienne de 1280 par 24 donne donc un quotient de 53 et un reste égal à 8.

III. La proportionnalité

1. Définitions

Définition

Soient deux suites numériques à n valeurs $(u) = (u_1, u_2, \dots u_n)$ et $(v) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. On dit que la suite (v) **est proportionnelle à la suite** (u) s'il existe un réel k non nul tel que pour tout entier i, avec $1 \leq i \leq n$ on ait : $\quad v_i = k \times u_i$

Le réel k est appelé le **coefficient de proportionnalité.**

On va alors associer à cette situation, une fonction :

Définition

Dans le cas où les suites sont proportionnelles, on dit que v_i est l'image de u_i par **l'application linéaire *f*** définie par $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k \times x \end{cases}$

2. Propriété

Dans une situation de proportionnalité,

- L'image de 0 est 0 ;
- L'image de 1 est k, k est le coefficient de proportionnalité ;
- Il y a linéarité additive : si x et x' ont pour images y et y', alors $x + x'$ a pour image $y + y'$;
- Il y a linéarité multiplicative : si x a pour image y et si m est un réel quelconque, alors mx a pour image my.

3. Tableau de proportionnalité

On peut visualiser ces suites et leurs propriétés dans un tableau :

				linéarité additive			**linéarité multiplicative**	
antécédents	u_i	0	1	x	x'	$x + x'$	x	mx
images	v_i	0	k	y	y'	$y + y'$	y	my

Et puisque y s'écrit de la forme kx, on a aussi les fractions égales suivantes :

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{y}{x} = k$$

4. Représentation graphique

Si l'on a la courbe représentative d'une fonction f dans un repère (O, x, y) ; les coordonnées des points de la courbe d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$ sont liées par une situation de proportionnalité si et seulement si la représentation graphique est une droite, passant par l'origine du repère.

5. Différentes situations de proportionnalité

1. Pourcentage

Appliquer un pourcentage de p %

- Augmenter une valeur x de p % revient à multiplier x par $(1 + p/100)$
- Diminuer une valeur x de p % revient à multiplier x par $(1 - p/100)$

Rechercher la valeur initiale

Pour trouver la valeur avant changement connaissant le pourcentage appliqué, on peut utiliser un tableau de proportionnalité :

Valeur initiale	**Valeur après hausse de p %**
? 100	V $100 + p$

Calculer un pourcentage

Si une valeur augmente (ou diminue) de p sur une valeur initiale V, la proportion de hausse (ou de baisse) est de $\frac{p}{V}$ (« augmentation de p **sur** V ») et le pourcentage d'augmentation est donc de $\frac{p}{V} \times 100$ %.

2. Échelle

L'échelle d'une carte ou d'une maquette nous permet de déterminer la distance réelle entre deux points ou la taille réelle de l'objet. C'est une situation de proportionnalité.

Définition

On dit que **l'échelle d'une carte est de $1/a$** si 1 cm sur la carte représente en réalité a cm.