SOMMAIRE

MATHÉMATIQUES

Présentation du programme et des épreuves

Le programme hors spécialité

Suites	Limites	▪ Limite des suites géométriques ou monotones ▪ Les théorèmes des gendarmes
	Suites bornées	▪ Suites minorées, majorées
Les fonctions	Limites	▪ Opérations sur les limites ▪ Les asymptotes
	Continuité	▪ La propriété des valeurs intermédiaires, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$
	Fonctions composées	▪ Les limites ▪ Les dérivées
	Intégrale	▪ L'aire « sous la courbe » ▪ Calcul d'une intégrale, les primitives d'une fonction ▪ Règles de calculs : Chasles, linéarité
Des fonctions particulières	Fonctions trigonométriques	▪ Le cercle trigonométrique ▪ Leurs dérivées
	$e^{u(x)}$	▪ Dérivée, signe, limites ▪ Les règles de calcul
	$\ln(u(x))$	▪ Dérivée, signe, limites ▪ Les règles de calcul
Probabilités	Probabilités conditionnelles	▪ Les arbres pondérés ▪ Calcul de $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, de $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ ▪ La formule des probabilités totales ▪ Indépendance
	Loi binomiale $\mathrm{B}(n\ ;\ p)$	▪ Espérance, écart type de X ▪ Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
	Lois à densité	▪ Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ ▪ Loi normale $\mathrm{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ ▪ Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
Statistique	Population, échantillons	▪ Intervalle de fluctuation ▪ Intervalle de confiance
Complexes	Forme algébrique	▪ Partie réelle, partie imaginaire ▪ Calculs, conjugaison ▪ Équations du second degré
	Forme trigonométrique	▪ Module et argument ▪ D'une forme à l'autre ▪ Notation exponentielle
	Le plan complexe	▪ Affixe d'un point, d'un vecteur ▪ Reconnaître la nature d'un triangle

Géométrie dans l'espace	Points	▪ Points alignés, coplanaires
	Vecteurs	▪ Vecteurs colinéaires, coplanaires ▪ Produit scalaire
	Droites	▪ Vecteurs directeurs, repères d'une droite ▪ Représentations paramétriques ▪ Positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan
	Plans	▪ Vecteurs normaux, repères d'un plan ▪ Equations cartésiennes, représentations paramétriques ▪ Positions relatives de deux plans

Le programme de spécialité

Matrices	Calculs	▪ Multiplication, puissances ▪ Matrice inverse
	Systèmes	▪ Ecriture matricielle d'un système linéaire
	Graphes probabilistes	▪ Les états successifs, l'état stable
Arithmétique	Divisibilité	▪ La transitivité ▪ Les combinaisons linéaires
	Division euclidienne	▪ Les congruences ▪ Le PGCD
	Entiers premiers entre eux	▪ Le théorème de Bezout ▪ Le théorème de Gauss
	Nombres premiers	▪ Décomposition d'un entier

L'épreuve de 4 heures

▶ Nombre d'exercices

- Quatre en général de 5 points chacun.
- Trois sont de ces exercices sont communs à tous les candidats, le dernier est différent suivant que le candidat est inscrit en spécialité mathématique ou pas.

▶ Souvent un QCM

- Il y a souvent un QCM, avec ou sans justifications.
- Ce QCM porte souvent sur la géométrie dans l'espace ou sur les lois exponentielles.

▶ Exercices qu'on peut attendre

- Un exercice commençant par des probabilités conditionnelles, continuant avec une loi binomiale, une loi normale, une loi exponentielle.
- Un exercice avec une suite définie par récurrence, un algorithme, des suites monotones.
- Un exercice avec une fonction soit exponentielle soit logarithmique.

▶ L'exercice de spécialité, il y a plusieurs possibilités

- Une suite avec matrices, un graphe probabiliste.
- Un exercice basé sur la divisibilité et le PGCD.
- Les propriétés arithmétiques des termes d'une suite d'entiers définie par récurrence.
- Codages, décodages, congruences.

1 Algos à foison

À SAVOIR

La commande « Si… alors »

L'algorithme		Ce qu'il se passe
Variable	u	
Initialisation	Affecter à u la valeur 3	
Traitement	Si $u < 4$ affecter à u la valeur $2u$.	$u = 3$ est plus petit que 4, c'est vrai. Alors u devient $2u = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow u = 6$
Sortie	Afficher u	6 s'affiche.

Cet algorithme, comme tous les autres, peut se réaliser sur les calculatrices Casio ou Texas ou encore avec le logiciel Xcas ou d'autres.

La commande « Si… sinon »

L'algorithme		Ce qu'il se passe
Variable	u	
Initialisation	Affecter à u la valeur 5	
Traitement	Si $u < 4$ affecter à u la valeur $2u$ Sinon, affecter à u la valeur $u + 7$	$u = 5$ est plus grand que 4. On rentre donc dans le « sinon ». $u = 5$ devient $5 + 7 = 12 \Rightarrow u = 12$
Sortie	Afficher u	12 s'affiche.

La commande « Pour i de 1 à n »

L'algorithme		Ce qu'il se passe
Variable	u, i	
Initialisation	Affecter à u la valeur 2	
Traitement	Pour i de 1 à 3 (répéter 3 fois) Affecter à u la valeur $3u$	La première fois $(i = 1)$, u devient $3u = 3 \times 2 = 6 \Rightarrow u = 6$. La deuxième fois $(i = 2)$, u devient $3u = 3 \times 6 = 18 \Rightarrow u = 18$. La troisième fois $(i = 3)$, u devient $3u = 3 \times 18 = 54 \Rightarrow u = 54$.
Sortie	Afficher u	54 s'affiche.

La commande « Tant que »

L'algorithme		Ce qu'il se passe
Variable	u	
Initialisation	Affecter à u la valeur 3	
Traitement	Tant que $u > 1$ Affecter à u la valeur $\frac{u}{2}$ Fin « Tant que »	$u = 3 > 1$, c'est vrai u devient $\frac{u}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow u = 1,5$. $u = 1,5 > 1$, c'est vrai u devient $\frac{u}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \Rightarrow u = 0,75$. $u = 0,75$ n'est pas plus grand que 1 $\Rightarrow$ la boucle des calculs s'arrête.
Sortie	Afficher u	0,75 s'affiche.

EXERCICES

1 Trouver le bon résultat pour chaque algorithme.

<table>
<tr><th colspan="2">Algorithmes</th><th colspan="3">Résultats proposés</th></tr>
<tr><td>a.</td><td>x est une variable
x prend la valeur 3
x prend la valeur $x+1$
x prend la valeur $2x$
Afficher x</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>x, i sont des variables
x prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à 3
x prend la valeur $3x-1$
Fin Pour
Afficher x</td><td>2</td><td>5</td><td>14</td></tr>
</table>

2 BAC, CENTRES ÉTRANGERS, 2013

Quel est le résultat de cet algorithme ?

Variables	u, n
Initialisation	u prend la valeur 20 000 n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u > 15\,000$ n prend la valeur $n+1$ u prend la valeur $0{,}875 \times u + 1200$ Fin du Tant que
Sortie	Afficher n

3 BAC 2013 Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.

On note u_n le nombre de jouets fabriqués au cours de l'année $2000+n$. On a donc $u_0 = 120\,000$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.

b1. Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

b2. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 90\,000$.

1	**Variables**	A est un réel
2		n est un entier naturel
3	**Initialisation**	Affecter à A la valeur 120 000
4		Affecter à n la valeur 0
5	**Traitement**	Tant que $A \geq 90\,000$
6		n prend la valeur ....
7		....
8		Fin Tant que
9	**Sortie**	Afficher n

4 Paul est heureux. Né le 1er janvier 1990, il a une grand-mère qui lui a donné 10 € le jour de sa naissance, et qui a ensuite augmenté régulièrement le montant en lui donnant 20 % de plus que l'année précédente à chacun de ses anniversaires. Ces cadeaux doivent durer jusqu'aux 25 ans de Paul.

On note d_n la somme donnée à Paul le premier janvier de l'année $1990+n$.

a. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier.

b. Quel montant recevra-t-il pour son vingt-cinquième anniversaire ?

c. Justifier que Paul aura reçu, à l'euro près, 5 674 € au total, de 0 à 25 ans.

d. Résultats de l'algorithme suivant ?

Variables	d, A
Initialisation	d prend la valeur 10 A prend la valeur 1990
Traitement	Tant que $d < 100$ d prend la valeur $d \times 1{,}20$ A prend la valeur $A+1$
Sortie	Afficher d et A

2 Le raisonnement par récurrence

À SAVOIR

Le raisonnement par récurrence

	En général	Un exemple, à propos de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$.
Noms des étapes du raisonnement	On veut montrer qu'une proposition : P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.	On veut montrer que la proposition : P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.
Initialisation	On montre que P_0 est vraie.	P_0 : « $u_0 \leq 2$ » est vraie vu que $u_0 = 1 \leq 2$.
Hérédité	On montre que si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.	On suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n \leq 2$. Alors $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2$. Donc $u_{n+1} \leq 2$, P_{n+1} est vraie.
Conclusion	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n est vraie.	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie.

Attention

Il arrive que la récurrence commence à P_1, pas à P_0.

Le raisonnement par l'absurde

En général	Un exemple
On veut montrer qu'une proposition P est fausse.	On veut montrer que la proposition P : « La somme de deux nombres, l'un entier, l'autre pas entier, est un nombre entier » est fausse.
On suppose que P est vraie. On dit : « Si c'était vrai » !	Si c'était vrai !
On suit un fil logique qui de la proposition P nous mène à une conséquence C.	entier + pas entier = entier $\Rightarrow$ pas entier = entier − entier $\Rightarrow$ pas entier = entier
Cette conséquence C ne peut pas être ; elle est absurde.	C'est absurde, un pas entier ne peut pas être entier !
Donc la proposition P est fausse.	Donc la somme de deux nombres, l'un entier l'autre pas, n'est pas un entier.

La preuve d'une fausseté par contre-exemple

« Tous les êtres humains sont grands. » Mais c'est faux.
La preuve est que je ne le suis pas, je suis un contre-exemple.

EXERCICES

1 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 10 - u_n \end{cases}$.

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$.

2 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

a. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^n$.

b. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -2^n$. Quel est le sens de variation de cette suite ?

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3 L'année 2012, un groupe de tourterelles comptait 1000 têtes.

On a remarqué que, d'une année sur l'autre, approximativement, la moitié de la population des tourterelles décroissait de 40 % tandis que l'autre moitié gagnait 100 éléments.

On appelle T_n le nombre de tourterelles en l'année $2012+n$. On a donc : $\mathrm{T}_0 = 1000$.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{T}_{n+1} = 0{,}8\mathrm{T}_n + 100$.

c. Prouver, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout n, $\mathrm{T}_n = 500 \times 0{,}8^n + 500$.

d. Combien seront les tourterelles en l'année 2025 ? Arrondir à l'unité près.

e. Ce groupe de tourterelles est-il destiné à s'éteindre ?

4 **Question préliminaire :** Montrer que si une suite (u_n) a pour limite un réel L, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(u_{n+1} - u_n\right) = 0.$$

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2^n - n$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2.

b1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$.

b2. En déduire qu'il y a une absurdité à imaginer que cette suite a pour limite un réel L.

5 **a.** Prouver, en donnant un contre exemple, que la proposition suivante n'est pas vraie : « Pour tout réel x, $(2x)^2 = 2x^2$ ».

b. Résoudre l'équation : $(2x)^2 = 2x^2$.

6 **CONCOURS FESIC**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Le raisonnement par récurrence suivant est-il exact ? Justifier.

> On veut montrer que quel que soit l'entier naturel n, la proposition $\mathrm{P}(n)$: $u_n > 1$ est vraie.
>
> **INITIALISATION :** cas $n = 0$.
>
> On a $u_0 = 3 > 1$. Donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
>
> **HÉRÉDITÉ :**
>
> Supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie.
>
> Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
>
> On a $u_n > 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.
>
> Donc $4u_n - 1 > 4 \times 1 - 1 = 3$ et $u_n + 1 > 1 + 1 = 2$.
>
> On en déduit :
>
> $\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 1} > \dfrac{3}{2} > 1$ et donc $u_{n+1} > 1$.
>
> Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
>
> **CONCLUSION :** Quel que soit l'entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

3 Les suites géométriques

À SAVOIR

Définition

Les nombres u_0, u_1, u_2, … sont en progression géométrique quand, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par un même nombre q, la raison (géométrique) de la suite.

Les deux formules

Petits schémas	$u_n \xrightarrow[\times q]{} u_{n+1}$	$u_0 \xrightarrow[\times q]{} ..... \xrightarrow[\times q]{} u_n$
Écritures mathématiques	$u_{n+1} = u_n \times q$	$u_n = u_0 \times q^n$

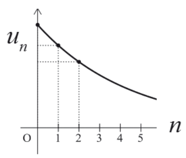
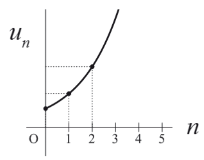
Attention

Quand la suite commence au numéro 1, il faut changer $u_n = u_0 \times q^n$ en $u_n = u_1 \times q^{n-1}$; c'est la formule qui donne u_n en fonction de n.

La somme des premiers termes d'une suite géométrique

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Des suites géométriques à premier terme positif

Deux cas	$u_0 > 0$ **et** $0 < q < 1$	$u_0 > 0$ **et** $q > 1$
La représentation graphique		
La variation	Cette suite est décroissante.	Cette suite est croissante, à croissance exponentielle.
La limite	Les u_n se font très petits, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$	Les u_n se font très grands, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Il faut savoir

- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

La suite géométrique de premier terme 200 et de raison 0,7

- Son terme général est $u_n = u_0 q^n = 200 \times 0,7^n$.
- $q = 0,7$ vérifie $-1 < q = 0,7 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 200 \times 0,7^n = 0$.
  La suite tend (ou converge) vers 0.
- La suite est aussi décroissante. Puisque $u_{20} = 200 \times 0,7^{20} = 0,159...$, tous les u_n de rang supérieur à 20 seront plus petits que 0,159… : $n \geq 20 \Rightarrow u_n = 200 \times 0,7^n \leq 0,159...$