Sommaire

MATHÉMATIQUES

Présentation du programme et de l'épreuve

Le programme s'articule autour de 3 grandes parties : L'ANALYSE (fonctions et suites) ; LES STATISTIQUES ET PROBABILITÉS ; LA GÉOMÉTRIE (trigonométrie et géométrie analytique).

- Nous avons construit nos fiches autour de ces trois parties en rajoutant une partie consacrée à la LOGIQUE et aux ACTIVITÉS TICE.
- Dans chaque partie, il y a conformément au programme des thèmes qui permettent de mieux l'appréhender. Chacun de ces thèmes pourra faire l'objet d'une ou plusieurs fiches selon la densité des connaissances à acquérir.
- Nous vous conseillons d'étudier les fiches 16 à 21 dès le début de l'année car elles vous serviront pour les raisonnements logiques, au cours des activités TICE qui consistent à maîtriser les logiciels fondamentaux et les calculatrices, et dans la plupart de nos fiches. Nous avons facilité votre travail au niveau de ces fiches en ne mobilisant que des connaissances de Seconde sauf mention contraire.
- Il faut absolument apprendre votre cours, et faire les exercices par écrit, pour maximiser l'efficacité des 22 fiches.

Les différentes parties

▶ ANALYSE

Cette partie consiste à utiliser de nouveaux outils pour résoudre des problèmes relevant de phénomènes modélisés.

Lorsque les phénomènes en question seront continus (optimisation, évolution, étude de grandeurs physiques…), on utilisera les fonctions.

En revanche, lorsque les phénomènes seront discrets (capital placé, évolution, approximation d'un irrationnel…), ce sont les résultats sur les suites numériques qui nous serviront.

Les suites se prêtent bien à la construction d'algorithmes et l'utilisation de tableurs, et les outils de calcul formel (X-CAS et calculatrices haut de gamme) à la vérification de vos calculs.

▶ PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

L'étude des statistiques vue en Seconde s'enrichit en 1S de nouveaux outils, aussi bien dans le cas où les modalités et les effectifs correspondent à un caractère discret, que dans celui où elles correspondent à un caractère continu.

En probabilité, il faudra mobiliser les connaissances de Seconde pour étudier les paramètres liés à l'étude d'une nouvelle notion : celle de variable aléatoire discrète. On étudiera plus précisément les variables aléatoires qui suivent une loi binomiale.

Dans le cadre de cette loi binomiale, on reprendra le travail vu en Seconde sur l'échantillonnage.

Là encore, il sera nécessaire, de maîtriser les algorithmes et les tableurs pour simuler des situations aléatoires, et de savoir utiliser la calculatrice en statistiques.

▶ GÉOMÉTRIE

En géométrie analytique, on introduit cette année un nouvel outil : le produit scalaire. Cela, afin de renforcer la capacité de l'élève à étudier une configuration (alignement, parallélisme, distances, angles…).

D'autre part, cette nouvelle notion permettra de démontrer de nouveaux résultats en trigonométrie, et par conséquent d'approfondir ce qui a été vu en Troisième et en Seconde sur les « redoutables », sinus, cosinus et tangentes.

Il est évident que le logiciel GÉOGÉBRA sera d'une grande efficacité pour conjecturer des résultats avant de les démontrer.

▶ LOGIQUE ET ACTIVITÉS TICE

Quantificateurs, négation, réciproque, contraposée, raisonnements par l'absurde, par analyse et synthèse, et par disjonction des cas n'auront plus de secrets pour vous après l'étude des deux fiches de **logique**.

Enfin la construction d'**algorithmes**, l'utilisation des **calculatrices graphiques**, des **tableurs** et des logiciels **X-CAS** et **GÉOGÉBRA** : c'est la mode, d'où les dernières fiches.

1 Second degré

Il s'agit dans cette fiche d'utiliser les propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

À SAVOIR

Notations et définitions

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le discriminant de $f(x)$.

Le nombre $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est l'abscisse de l'extremum de *f*.

Si $\Delta > 0$, on note $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Forme canonique

L'écriture $f(x) = a\left((x-x_0)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ (démontrée en cours) s'appelle forme canonique du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Factorisation

On déduit de cette écriture les résultats donnés dans les tableaux suivants :

	Pour $\Delta < 0$
Factorisation de $f(x)$	Infactorisable dans $\mathbb{R}$
Solution(s) de $f(x) = 0$	$S = \varnothing$
Signe de $f(x)$	Signe de a

	Pour $\Delta = 0$
Factorisation de $f(x)$	$a(x-x_0)^2$
Solution(s) de $f(x) = 0$	$S = \{x_0\}$
Signe de $f(x)$	Signe de a

	Pour $\Delta > 0$
Factorisation de $f(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
Solution(s) de $f(x) = 0$	$S = \{x_1, x_2\}$
Signe de $f(x)$	Signe de a à l'extérieur de x_1 et x_2, et signe opposé à l'intérieur de x_1 et x_2

Variations de *f*

On déduit également de l'écriture canonique les tableaux suivants :

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		↗	$f(x_0)$	↘	

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		↘	$f(x_0)$	↗	

CONSEILS

- Il faut apprendre les propriétés précédentes par cœur, les appliquer, et vérifier vos résultats à la calculatrice (extrémums, variations, solution(s) d'une équation où d'une inéquation).
- Ne vous jetez pas sur Δ lorsqu'il y a une racine évidente (–2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2).

  En effet, si 2 annule $f(x) = ax^2 + bx + c$, cela signifie que l'on peut factoriser $f(x)$ par $(x-2)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire $f(x) = (x-2)(ax+b)$.

  Ensuite, il suffit d'identifier les coefficients des termes de plus haut degré et les termes constants pour trouver *a* et *b*.

  Exemple : $2x^2 + x - 10$ s'annule pour x = 2, donc $2x^2 + x - 10 = (x-2)(ax+b)$. Quand on développe, il faut prendre a = 2 pour « tomber » sur $2x^2$, et b = 5 pour « tomber » sur –10.

  Finalement, $2x^2 + x - 10 = (x-2)(2x+5)$, ce qui donne $x_1 = -\dfrac{5}{2}$ et $x_2 = 2$ sans avoir eu besoin de calculer Δ.

EXERCiCES

1 Détermination d'une fonction du second degré – Propriétés

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui s'annule en 1 et 3 et dont la courbe représentative admet comme extremum le point $A(2,-4)$.

1. Déterminer $f(x)$.

....

2. Dresser le tableau de variation de f.

....

3. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[0;5]$.

....

2 Quizz

1. Est-ce que l'ensemble des solutions de $x^2 + x - 2 = 0$ est $S = \{1\}$?

....

2. Quel est l'ensemble des solutions de $x^2 + x + 1 > 0$?

....

3. Est-ce que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ admet pour maximum 2 ?

....

4. Existe-t-il $m \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + mx + 2 = 3$ a pour solution x = 2 ? Si oui, quelle est l'autre solution ?

....

Notes

....

....

....

....

....

....

....

3 QCM – Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

1. L'équation $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x + 1$ admet pour solution.

a. $x = -2$
☐ vrai ☐ faux

b. $x = 1$
☐ vrai ☐ faux

c. $x = 0$
☐ vrai ☐ faux

2. L'ensemble des solutions de $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ est :

a. $S = \varnothing$
☐ vrai ☐ faux

b. $S = \mathbb{R}$
☐ vrai ☐ faux

c. $S = \{-1\}$
☐ vrai ☐ faux

4 Le 14 juillet…

Le 14 juillet, un peloton de 20 m de long marche au pas cadencé à **vitesse constante**.

Un petit chien part du dernier rang dans la direction et le sens de marche à **vitesse constante**.

Quand il atteint le premier rang, il fait demi-tour et repart en sens inverse dans la même direction et à la même vitesse. Finalement il rejoint le dernier rang quand les soldats de ce rang ont parcourt 20 m depuis le départ du chien de leur rang.

Quelle distance a parcouru le petit chien lors de son aller-retour ?

....

....

....

....

....

MATHÉMATiQUES

2 Fonctions usuelles

Il s'agit d'introduire les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$, puis d'étudier le comportement sur un **intervalle** *I des fonctions $x \mapsto au(x) + bv(x)$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$), $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$, et $x \mapsto |u(x)|$, lorsque ces fonctions sont définies, et que $x \mapsto u(x)$ est* **monotone** *sur l'intervalle I.*

À SAVOIR

Rappels de Seconde

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I, est croissante (décroissante) sur I, si pour tout a et b de I : $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ ($a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$).

Pour étudier les variations d'une fonction en utilisant ces définitions on procède par étapes successives en utilisant les théorèmes de « rangement » résumés dans le tableau suivant :

	Changement de sens	Pas de changement de sens	Conditions
Addition ou soustraction d'un nombre		⋆	
Multiplication ou division par un nombre	⋆ Si le nombre est négatif	⋆ Si le nombre est positif	
Addition membre à membre		⋆	
Multiplication membre à membre		⋆	Tous les nombres doivent être positifs
Passage au carré	⋆ Si les nombres sont négatifs	⋆ Si les nombres sont positifs	Tous les nombres doivent être de même signe
Passage au cube		⋆	
Passage à l'inverse	⋆		Tous les nombres doivent être de même signe
Passage à la racine		⋆	Tous les nombres doivent être positifs

Les fonctions $x \mapsto au(x) + b$

Ces fonctions sont définies là où u l'est, et si $a > 0$, sur I, elles ont les mêmes variations que $x \mapsto u(x)$, sinon elles ont des variations opposées.

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Ces fonctions sont définies pour $u(x) \geq 0$, et dans la mesure où $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, sur I, elles ont les mêmes variations que $x \mapsto u(x)$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$

Ces fonctions sont définies pour $u(x) \neq 0$, et dans la mesure où $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$, sur I, elles ont des variations opposées à $x \mapsto u(x)$.

Les fonctions $x \mapsto |u(x)|$

On ne peut pas donner de propriété générale concernant les variations comme dans les trois cas précédents car $x \mapsto |x|$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Pour étudier ces fonctions il faut les définir par morceaux en utilisant la propriété suivante :

si $u(x) \geq 0$ **alors** $|u(x)| = u(x)$, **et si** $u(x) \leq 0$ **alors** $|u(x)| = -u(x)$

CONSEILS

- Étudier toujours les variations sur un **intervalle**. On rappelle qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un ensemble tel que pour tout a et b de I on a l'intervalle fermé de bornes a et b contenu dans I (il ne faut **pas de « trous »**).
- Pour étudier les variations avec les « théorèmes de rangement », il faut utiliser la bonne expression numérique de la fonction (voir Exercice 1).
- Pour étudier la position relative de deux courbes C_f et C_g sur un intervalle I, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ sur I et l'on résume le tout dans un tableau. Il faut savoir **par cœur** que pour $x \in]0;1[$ on a $x^2 < x < \sqrt{x}$, et que pour $x \in]1;+\infty[$ on a $x^2 > x > \sqrt{x}$.

EXERCICES

1 Étude d'une fonction homographique

On considère la fonction *f* définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$.

1. Montrez que $f(x)=2+\dfrac{5}{x-3}$, et étudiez les variations de *f* avec cette expression de deux façons.

....

2. Encadrez *f* sur $I=[4;6]$, et discutez selon m réel du nombre de solutions de $f(x) = m$ sur I.

....

2 Quizz

1. Est-ce que *f* définie sur $I=]-3;+\infty[$ par $f(x)=-2\sqrt{x+3}+4$ est monotone ?

....

2. Est-ce que l'équation $|x-3|=|x+4|$ a au moins une solution ? Si oui donnez en une.

....

3. Est – ce que $\dfrac{\pi^2}{81}<\dfrac{\pi}{9}<\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$? Pourquoi ?

....

4. On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+1$ et $g(x)=x+1$, et l'on note C_f et C_g leurs courbes représentatives. Est-ce que C_f est au dessus de C_g sur $\mathbb{R}_+$? Pourquoi ?

....

3 Sommes – Algorithme

Soit les fonctions S_1 et S_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $S_1(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$ et $S_2(x)=\dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

1. Calculez $S_1(x)-S_1(x-1)$ et $S_2(x)-S_2(x-1)$.

....

2. En déduire $T_1(n)=\sum_{k=0}^{n} k$ et $T_2(n)=\sum_{k=0}^{n} k^2$, puis $T_1(100)$ et $T_2(100)$.

....

3. Écrire un algorithme permettant de retrouver $T_1(100)$ et $T_2(100)$.

....

4. Utiliser cet algorithme pour déterminer $T_5(20)=\sum_{k=0}^{20} k^5$.

....

Notes

....

....

....

....

....

....

....

MATHÉMATIQUES

3 Dérivation

Il s'agit dans ce chapitre d'introduire la notion de fonction dérivée, afin entre autres, de pouvoir étudier les variations d'une fonction, sans avoir à retenir certaines propriétés relatives aux variations évoquées dans les deux premières fiches.

À SAVOIR

Nombre dérivé en *a*

Lorsqu'il existe, on appelle nombre dérivé de f en a, le nombre **fini** l_a défini par $l_a = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On dit alors que f est dérivable en a et l'on note $l_a = f'(a)$.

Fonction dérivée

Lorsqu'une fonction définie sur un intervalle I est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I, et la fonction qui a tout x_0 de I associe son nombre dérivé $f'(x_0)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I, et se note f'.

Tableau des fonctions dérivées

Dans ce tableau u et v sont dérivables sur un intervalle I.

$f(x)$	**Ensemble de dérivabilité**	$f'(x)$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$au(x)+bv(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	Intervalle I	$au'(x)+bv'(x)$
$u(x)\times v(x)$		$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$	Intervalle I privé des valeurs où v s'annule	$-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Intervalle I privé des valeurs où v s'annule	$\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$

Variations et fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

$f'(x) \geq 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f est croissante sur I.

$f'(x) \leq 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f est décroissante sur I.

$f'(x) = 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f est constante sur I.

Lorsque f' ne s'annule pas sur un intervalle inclus dans I, on parle de stricte monotonie.

Équation de la tangente en un point

Si f est dérivable en x_0, sa courbe représentative au point d'abscisse x_0 admet une tangente d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.