Polynômes 01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 Montrer que $P = X^6 - 12X^5 + 60X^4 - 160X^3 + 240X^2 - 192X + 64$ est le carré d'un polynôme à déterminer.

$\diamond$

1.02 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^{n} (1+X^{2^k}) = 1+X+X^2+\cdots+X^{2^{n+1}-1}$.

$\diamond$

1.03 On définit, par récurrence, une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$P_0 = 1; P_1 = X$, et $\forall\, n \geq 1, P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P_n(\cos x) = \cos nx$.

$\diamond$

1.04 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de fonction polynomiale associée périodique. Montrer que $\deg P \leq 0$.

$\diamond$

1.05 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

[Si $P = \sum a_k X^k$, alors pour tout polynôme Q, $P \circ Q$ est le polynôme $\sum a_k Q^k$.]

$\diamond$

1.06 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{K}[X]$:

a) $Q^2 = XP^2$, d'inconnues P et Q. **b)** $P \circ P = P$, d'inconnue P.

$\diamond$

1.07 Trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

$\diamond$

1.08 Résoudre $P'^2 = 4P$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

$\diamond$

1.09 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de factorielles.

$\diamond$

1.10 Déterminer $P \in \mathbb{C}_3[X]$, tel que :

$$P(j) = j^2, P(j^2) = j, P'(j) = j, P'(j^2) = j^2.$$

$\diamond$

1.11 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

$\diamond$

1.12 Pour quelles valeurs de n le polynôme $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$? Même question avec $Q_n = (1+X^4)^n - X^4$.

$\diamond$

1.13 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de fonction polynomiale associée à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$. Montrer alors la proposition suivante :

$$\exists\,(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = Q^2 + R^2 \quad (1)$$

$\diamond$

1.14 Montrer que pour tout n, le polynôme $(X^2+X+1)^2$ divise le polynôme $Q_n = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

$\diamond$

1.15 Trouver a, b, c pour que $X^{2n} + aX^{n+1} + bX^n + cX^{n-1} + 1$ soit divisible par $(X-1)^3$.

$\diamond$

1.16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Z_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

$\diamond$

1.17 Soit le polynôme $R = X^3 + X + 1$.

1°) Montrer que R admet trois racines distinctes a, b et c dans $\mathbb{C}$.

2°) Montrer que $a, b, c, -a, -b$ et $-c$ sont six complexes distincts.

3°) Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on admet l'existence et l'unicité d'un polynôme Q tel que : $Q(X^2) = P(X)P(-X)$. Trouver un polynôme de degré 3 ayant pour racines a^2, b^2 et c^2.

$\diamond$

1.18 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul, tel que $P(X^2) = -P(X)P(X+1)$.

Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi. En déduire que ou bien $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

$\diamond$

1.19 Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

$\diamond$

1.20 Soit P un polynôme de degré $n+1$ de $\mathbb{R}[X]$ possédant $n+1$ racines réelles distinctes. Vérifier que P' possède exactement n racines réelles distinctes.
En déduire que les racines de P^2+1 sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.
Montrer de façon générale que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les racines de $P^2+\alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

$\diamond$

1.21 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul et $n = \deg P$. Montrer que la suite des sommes des racines de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ est une progression arithmétique.

$\diamond$

1.22 On définit une suite (P_n) de polynômes par :

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1°) Si $n \geq 1$, montrer que P_n est un polynôme unitaire de degré n.

2°) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $P_n\big(z + \frac{1}{z}\big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

3°) Déterminer les racines du polynôme P_n.

$\diamond$

1.23 Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $(X-1)^2$ divise $P-1$ et $(X+1)^2$ divise $P+1$.

$\diamond$

1.24 On désire déterminer dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

1°) Montrer que si un tel polynôme P non nul existe alors, en notant n son degré, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que : $nP = (X-a)P'$. Trouver alors une relation entre $P^{(n-1)}$, $P^{(n)}$ et a.

2°) En déduire les polynômes solutions.

$\diamond$

1.25 Déterminer a pour que $P = X^4 - X + a$ et $Q = X^2 - aX + 1$ aient deux racines communes.

$\diamond$

1.26 Trouver α et β pour que $X^3 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$.

$\diamond$

1.27 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$ (et le cas échéant de $P'(a)$), le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

$\diamond$

1.28 Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B pour :
$A = (X \sin\theta + \cos\theta)^n$ et $B = X^2 + 1$,

puis pour $A = X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$ et $B = X^2 - 2X \cos\theta + 1$.

$\diamond$

1.29 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B pour : $A = X^q$ et $B = X - 1$; $A = X^{mq}$ et $B = X^m - 1$; $A = X^n - 1$ et $B = X^m - 1$.
(m, n, q étant trois entiers non nuls avec $n \geq m$)

$\diamond$

1.30 Trouver le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $(X^2 + 1)^2$.

$\diamond$

1.31 Déterminer les polynômes du troisième degré à coefficients réels divisibles par $X - 1$, ayant même reste dans les divisions euclidiennes par $X - 2$, $X - 3$, $X - 4$.

$\diamond$

1.32 Montrer que pour tout $n \geq 2$, $P_n = X^n \sin\alpha - X \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ est divisible par $A = X^2 - 2X \cos\alpha + 1$.

$\diamond$

1.33 **1°)** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_2)^2$.

2°) Si $n \in \mathbb{N}$, écrire la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. Déterminer le reste de cette division. En déduire l'expression des coefficients de la matrice A^n.

$\diamond$

1.34 Factoriser $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

$\diamond$

1.35 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, $P = X^4 + 2$.

$\diamond$

1.36 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4 + 4$; $X^6 + 27$; $X^8 + X^4 + 1$.

$\diamond$

1.37 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $P = \cos 3a + X \sin 3a - (\cos a + X \sin a)^3$, où $a \in \mathbb{R}$.

$\diamond$

1.38 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, $Q = X^{2n} + X^n + 1$.

$\diamond$

1.39 **1°)** Déterminer algébriquement les racines carrées de $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.

2°) Diviser $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $X^6 - i$, en utilisant les résultats de la première question.

3°) Factoriser $X^6 - i$ en résolvant $x^6 = i$ dans $\mathbb{C}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ ·

II. INDICATIONS

1.01. À part poser $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$, développer Q^2 et identifier à P, que faire d'autre ?
1.02. On procèdera par récurrence sur n.
1.03. On pensera aux formules de trigonométrie usuelles.
1.04. On posera $Q(X) = P(X) - P(0)$ et on vérifiera qu'il a une infinité re racines.
1.05. Ecrire $P \circ P - X = P \circ P - P + P - X$ et penser aux identités remarquables.
1.06. à **1.08.** Ce sont des histoires de degré.
1.10. On rappelle que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.
1.11. Dériver le polynôme en présence et remarquer !
1.12. Les racines de $1 + X + X^2$ sont j et j^2.
1.13. On montrera d'abord que nécessairement $\deg P$ est pair, que P est de coefficient dominant positif. Puis on montrera que (1) est vraie pour $\deg P = 2$, et ensuite que pour tous polynômes réels U, V, Q_1, R_1 :

$$(U^2 + V^2)(Q_1^2 + R_1^2) = (UQ_1 + VR_1)^2 + (UR_1 - VQ_1)^2.$$

On en déduira enfin l'égalité (1).
1.14. Montrer que j est racine double de Q_n.
1.19. C'est un peu la suite de l'exercice précédent !
1.20. C'est un jeu de Rolle.
1.21. Il suffit de calculer les coefficients des deux termes de plus hauts degrés des dérivées de P.
1.22. On fera des récurrences «fortes».
1.23. On connait des racines de P'.
1.24. Dériver redériver et redériver encore la relation entre P et P'.
1.26. Faire le calcul explicite de la division.
1.27. Le reste appartient à $\mathbb{R}_1[X]$.
1.28. En substituant à X la valeur i on reconnaît la formule de de Moivre.
1.29. $X^q = X^q - 1 + 1$!
1.30. Si R est le reste de cette division euclidienne, on effectuera sa propre division euclidienne par $X^2 + 1$ et on remplacera. Utiliser aussi l'exercice **1.28.**
1.31. Remarquer que P est de la forme $(X - 1)(aX^2 + bX + c)$ est un bon démarrage.
1.34. Trouver une racine «évidente»... d'ordre assez grand pour que le reste soit banal.
1.35. et **1.36.** Penser aux identités remarquables.
1.37. Penser à nouveau à de Moivre.
1.38. On rappelle (encore et encore) que j et j^2 sont racines de $X^2 + X + 1$.

III. CORRIGÉS DÉTAILLÉS DES EXERCICES

Corrigé 1.01

On écrit qu'il doit exister $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, tel que l'on ait $P = Q^2$, avec $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Si Q est une solution, $-Q$ est aussi solution et on peut supposer $a \geq 0$. On développe le carré et on identifie les coefficients :
$a^2 = 1$ donne $a = 1$, $2ab = -6$ donne $b = -6$, $b^2 + 2ac = 60$ donne $c = 12$, etc.
On trouve ainsi deux solutions : $Q = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ et $-Q$.

Corrigé 1.02

Posons $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (1 + X^{2^k})$, alors $P_0 = 1 + X$, et

$$P_1 = (1 + X)(1 + X^2) = 1 + X + X^2 + X^3$$

Supposons que pour un certain n fixé ≥ 1, on ait $P_n = 1+X+X^2+\cdots+X^{2^{n+1}-1}$.
Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n+1} (1 + X^{2^k}) = (1 + X^{2^{n+1}}) \prod_{k=0}^{n} (1 + X^{2^k}) \\ &= (1+X^{2^{n+1}})(1+X+X^2+\cdots+X^{2^{n+1}-1}) = 1+X+X^2+\cdots+X^{2^{n+2}-1} \end{aligned}$$

car les « nouveaux » termes viennent se ranger juste après les « anciens » et on a bien la formule au rang $n + 1$. On conclut par le principe de récurrence.

Corrigé 1.03

Les conditions de l'énoncé définissent clairement une suite de polynômes, et on voit facilement, par récurrence, que P_n est de degré n, et de coefficient dominant 2^{n-1} pour tout $n \geq 1$.
On a : $P_0(\cos x) = 1 = \cos(0x)$, $P_1(\cos x) = \cos x$.
Supposons alors la propriété vérifiée **jusqu'à** un certain ordre $n \geq 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(\cos x) &= 2 \cos x . P_n(\cos x) - P_{n-1}(\cos x) \\ &= 2 \cos x \cos(nx) - \cos(n-1)x \\ &= \cos(n+1)x + \cos(n-1)x - \cos(n-1)x = \cos(n+1)x \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie **jusqu'au** rang $n + 1$ et on conclut par le principe de récurrence fort. On vient donc de montrer que $\cos nx$ peut s'écrire comme polynôme en $\cos x$.

[*Ces polynômes portent le nom de* **polynômes de Tchébychev de première espèce**.]

Corrigé 1.04

Soit T une période de la fonction polynôme associée à $P \in \mathbb{K}[X]$. On a pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x + T) = P(x)$, d'où, par une récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(nT) = P(0)$.
En posant $Q(X) = P(X) - P(0)$, on a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}, Q(nT) = 0$.
Or un polynôme qui admet une infinité de racines est nul et par conséquent :

$$Q = 0, \textit{i.e.} : \forall\, x \in \mathbb{K}, P(x) = P(0).$$

et P est bien un polynôme constant.

Corrigé 1.05

Notons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P \circ P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^k$ et :

$$P \circ P - X = P \circ P - P + P - X = \sum_{k=0}^{n} a_k(P^k - X^k) + P - X$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(P^k - X^k) + P - X$$

Or on a l'identité : $P^k - X^k = (P - X)(P^{k-1} + XP^{k-2} + \cdots + X^{k-2}P + X^{k-1})$

Donc $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$, et on peut même préciser le quotient Q :

$$Q = P^{k-1} + XP^{k-2} + \cdots + X^{k-2}P + X^{k-1} + 1$$

Corrigé 1.06

a) On remarque que si l'un des deux polynômes est nul, l'autre l'est aussi. Donc $P = Q = 0$ est solution.

Soit maintenant (P, Q) un couple solution (en supposant P et Q non nuls). Alors : $2 \deg Q = 1 + 2 \deg P$. Comme le degré d' un polynôme est un entier, cette égalité est impossible. Finalement, seul le couple $(0, 0)$ est solution.

b) $P = 0$ est solution triviale. Puis, on écrit (si P est non nul) :

$$\deg P \circ P = (\deg P)^2 = \deg P$$

Donc $\deg P = 0$, ou $\deg P = 1$. On pose $P = aX + b$ et $P \circ P = P$ donne :

$$a(aX + b) + b = aX + b, \text{ d'où } \left[a^2 = a \text{ et } ab = 0\right]$$

Il reste $P = X$ ou $P = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Corrigé 1.07

Le polynôme nul est évidemment le seul polynôme constant solution.

Si P est solution telle que $\deg P \geq 1$, on a nécessairement :

$$2 \deg P = 2 + \deg P, \text{ donc } \deg P = 2$$

On écrit $P = aX^2 + bX + c$ et on identifie. Il reste $b = 0$ et $c = -a$. Finalement, les solutions sont les polynômes de la forme $P = \alpha(X^2 - 1)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé 1.08

Le polynôme nul est évidemment le seul polynôme constant solution.

Si P est solution telle que $\deg P \geq 1$, on a nécessairement :

$$2(\deg P - 1) = \deg P, \text{ donc } \deg P = 2$$

On écrit $P = aX^2 + bX + c$ et on identifie. Nécessairement $a = 1$ et $c = \frac{b^2}{4}$. Il reste pour solution $P = 0$ et $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2$, où $b \in \mathbb{R}$.

Corrigé 1.09

On remarque que P_n est nécessairement de degré n. On écrit alors :

$P_n = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$; $P'_n = n a_n X^{n-1} + \cdots + 2a_2 X + a_1$

L'égalité de l'énoncé entraîne par identification, degré par degré :

$$a_n = 1, a_{n-1} - n a_n = 0, a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} = 0, \ldots, a_0 - 1.a_1 = 0$$

On trouve donc : $a_{n-1} = n, a_{n-2} = n(n-1), \ldots, a_0 = n!$, soit :

$$P = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + ... + n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$$

Corrigé 1.10

Le polynôme $P'(X) - X$ est de degré au plus 2 et s'annule en j et j^2, il existe donc $a \in \mathbb{C}$, tel que : $P'(X) - X = a(1 + X + X^2)$.
On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$P = a(X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}) + \frac{X^2}{2} + b.$$

Il reste à exploiter $P(j) = j^2$ et $P(j^2) = j$ qui fournissent : $a = -1$ et $b = -\frac{2}{3}$.
Finalement : $P = -\frac{X^3}{3} - X - \frac{2}{3}$.

Corrigé 1.11

Posons $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et supposons que P admette une racine multiple a.
On a $P(a) = P'(a) = 0$. Or on remarque que $P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = P(x) - \frac{x^n}{n!}$
On en déduit : $\frac{a^n}{n!} = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.
Or 0 n'est évidemment pas une racine (même simple) de P, d'où la contradiction.

Corrigé 1.12

1°) Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $j^2 = \overline{j}$.
Le polynôme P_n est divisible par $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$ si et seulement si $P_n(j) = P_n(\overline{j}) = 0$. Comme P_n est un polynôme réel, j est racine de P_n si et seulement si $\overline{j}$ est racine de P_n. Bref :
P_n est divisible par $X^2 + X + 1 \iff P_n(j) = 0 \iff (j + 1)^n - j^n - 1 = 0.$
Comme $-j^2 = j + 1$, ceci s'écrit :

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = 0.$$

$n \mapsto (-1)^n$ est périodique de période 2, $n \mapsto j^n$ et $n \mapsto j^{2n}$ sont périodiques de période 3. Nous allons donc étudier l'égalité modulo 6.
Posons $u_n = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$.

$$\begin{cases} n = 6p & \Longrightarrow & u_n = -1 \\ n = 6p+1 & \Longrightarrow & u_n = 0 \\ n = 6p+2 & \Longrightarrow & u_n = 2j \\ n = 6p+3 & \Longrightarrow & u_n = -3 \\ n = 6p+4 & \Longrightarrow & u_n = 2j^2 \\ n = 6p+5 & \Longrightarrow & u_n = 0 \end{cases}$$

En conclusion P_n est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si n est de la forme $6p + 1$ ou $6p + 5$, pour $p \in \mathbb{N}$.

2°) De même :

$$\begin{aligned} Q_n \text{ est divisible par } X^2 + X + 1 \iff Q_n(j) = 0 &\iff (1 + j^4)^n - j^4 = 0. \\ &\iff (-j^2)^n = j \end{aligned}$$