

Jour n°1

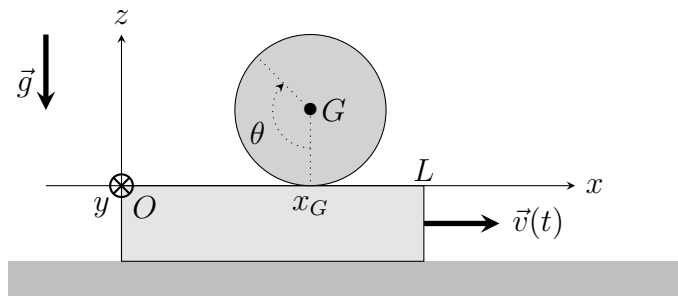
Question de cours 1

- 1) Contact de deux solides.
- 2) Lois phénoménologiques de Coulomb relatives au frottement de glissement. (MP)

Exercice 1

Un pavé mobile, de longueur L , se déplace sur le sol horizontal à la vitesse imposée $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_x$, par rapport au référentiel galiléen lié au sol. On pose sur ce pavé un cylindre homogène, de rayon R , de masse M , de centre de masse noté G et de moment d'inertie J_G . Le roulement du cylindre sur le pavé a lieu *sans glissement*.

Soit (O, x, y, z) un repère lié au pavé. L'abscisse de G est repérée par x_G ; la rotation du cylindre est repérée par l'angle θ . On donne $J_G = \frac{1}{2}MR^2$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



- 1) Traduire l'hypothèse de roulement sans glissement.
- 2) Le mouvement du pavé est uniformément accéléré : $\vec{v}(t) = at\vec{e}_x$ avec $a > 0$.
 - a) Faire le bilan des efforts appliqués au cylindre dans le référentiel lié au pavé.
 - b) Établir l'équation du mouvement du cylindre.
 - c) À l'instant $t = 0$, le cylindre est posé sur le bord droit du pavé, sans vitesse par rapport au pavé. Au bout de quelle durée τ le cylindre atteint-il le bord gauche du pavé?
- 3) Soit f le coefficient de frottement entre le cylindre et le pavé.
 - a) Déterminer l'inégalité liant a et f lorsqu'il n'y a pas de glissement.
 - b) Il y a glissement pour $a = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. En déduire la valeur de f .

Énoncé

- 1) Contact de deux solides.
- 2) Lois phénoménologiques de Coulomb relatives au frottement de glissement. (MP)

Analyse stratégique de l'énoncé

La question de cours est très classique. Sa parfaite connaissance est nécessaire à la description du contact entre des solides et bien sûr à la résolution des exercices. L'un des deux solides est fréquemment formé par le sol ou le support fixe (horizontal, incliné, en arc de cercle, etc...) sur lequel se déplace le solide mobile.

Le terme « loi phénoménologique » désigne une loi qui se fonde sur des observations, sur l'expérience, et qui n'est pas obtenue par l'application de principes plus fondamentaux. Il n'est donc pas question de démontrer ces lois mais il faut simplement les énoncer.

1) Le contact entre solides doit décrire :

- le contact ponctuel ;
- le contact non ponctuel ;
- le glissement ;
- le non-glissement.

Les deux derniers termes sont importants pour la description *cinématique* des solides. On obtient dans le cas du non glissement une relation entre les variables cinématiques (positions, angles,...), ce qui permet d'en déduire le nombre de degrés de liberté.

↔ Cette question amène aussi à distinguer les deux cas importants pour les lois de Coulomb. Elle permet de définir une grandeur essentielle, la vitesse de glissement.

2) Les lois de Coulomb distinguent le glissement du non glissement. Elles fournissent des relations *dynamiques*, c'est-à-dire des relations entre les forces qui s'exercent sur les solides. Il est essentiel d'avoir à l'esprit que les frottements peuvent *empêcher* le glissement alors que leur absence *permet* le glissement.

Rapport du jury 2009

Notons toujours la confusion malheureusement classique

« pas de frottements = pas de glissement »

[ainsi que] la méconnaissance fréquente du caractère non dissipatif des liaisons dans le cas du roulement sans glissement.

↔ La puissance des forces de frottement est bien sûr nulle en l'absence de frottement mais aussi, en présence de frottement, lorsqu'il y a non glissement.

Corrigé

1) Deux solides sont en contact s'ils partagent des points de leur surface respective. Le contact est qualifié de ponctuel s'il n'existe qu'un seul point commun. Par exemple, une boule posée sur un plan sera en contact ponctuel avec celui-ci, un pavé posé sur le plan sera en contact non ponctuel.

On peut se ramener au cas du contact ponctuel pour un mouvement *plan*, c'est-à-dire lorsque toutes les vitesses sont dans un même plan, comme, par exemple, le roulement d'un cylindre sur un plan incliné. Dans le plan des vitesses, le mouvement est celui d'un disque sur une droite, où un seul point est commun aux deux solides.

La vitesse de glissement est définie pour deux points en contact, appartenant chacun à un des solides. La notion importante ici est la distinction entre les différents « points » :

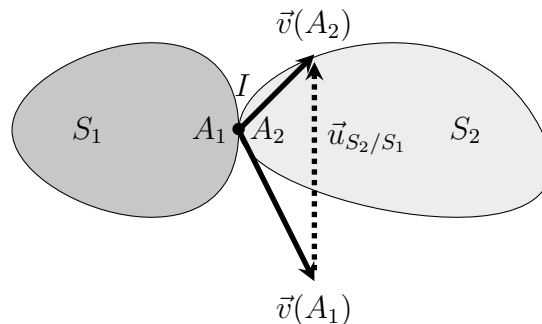
- le point *matériel* A_1 appartenant au premier solide ;
- le point *matériel* A_2 appartenant au second solide ;
- le point *mathématique* I , confondu avec A_1 et A_2 , qui décrit uniquement la position du point de contact dans l'espace.

Les vitesses nécessitent la définition d'un référentiel. Souvent, le référentiel choisi est celui qui est lié à l'un des solides, celui qui constitue le support ou le sol.

Soient $\vec{v}(A_1)$ et $\vec{v}(A_2)$ les vitesses des points matériels A_1 et A_2 dans un référentiel (R) donné. On définit alors la vitesse de glissement \vec{u}_{S_2/S_1} du solide S_2 par rapport au solide S_1 par :

$$\vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{v}(A_2) - \vec{v}(A_1).$$

Plaçons ces grandeurs sur un schéma :



La vitesse de glissement a la propriété d'être indépendante du référentiel !

La vitesse de glissement permet de définir deux cas de mouvements importants :

$$\vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{0} \quad : \quad \text{il n'y a pas de glissement.}$$

$$\vec{u}_{S_2/S_1} \neq \vec{0} \quad : \quad \text{il y a glissement.}$$

Par exemple, le schéma précédent correspond à un glissement des deux solides.

Remarques

- Il est équivalent de parler du glissement du solide S_2 par rapport à S_1 ou bien du glissement de S_1 par rapport à S_2 . En effet, les deux vitesses de glissement \vec{u}_{S_2/S_1} et \vec{u}_{S_1/S_2} sont opposées (voir la définition). Le vecteur est donc nul ou non nul quelle que soit la définition choisie.
- Le non glissement ne signifie pas qu'il n'y ait pas de mouvement d'un solide par rapport à l'autre. En effet, il peut y avoir roulement sans glissement, comme une boule de bowling en fin de course.
- La notion de glissement ou de non glissement est indépendante du référentiel.
- Physiquement, le non glissement est dû au fait que les forces exercées par un solide sur l'autre empêchent le glissement. C'est le cas des contacts rugueux, où les défauts (parfois microscopiques) des surfaces s'imbriquent et s'opposent au mouvement relatif des solides.

Cette dernière remarque est essentielle pour la suite et il est important de l'avoir à l'esprit : des forces de contact sont **nécessaires** au non glissement. Au contraire, lorsque ces forces sont absentes, il y a en général glissement. Pensez aux dérapages sur les sols verglacés ! La seconde question va préciser ces forces.

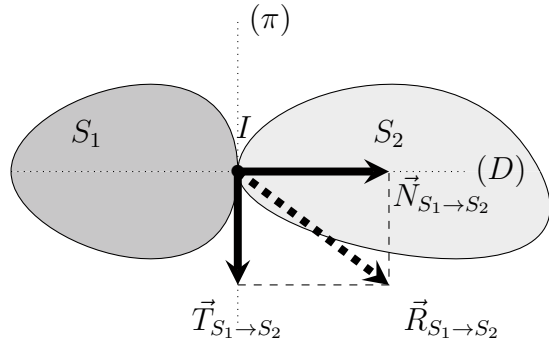
2) Les lois de Coulomb fournissent une description des forces de contact, et plus particulièrement de la force tangentielle.

Définissons tout d'abord les composantes des forces :

Soit (π) le plan tangent aux deux solides au point de contact I . Ce plan permet de définir la droite (D) normale au plan (π) en I .

Soit $\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}$ la réaction du solide S_1 sur le solide S_2 .

- La composante de cette force sur (D) est la composante normale $\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}$.
- La composante de cette force dans le plan (π) est la composante tangentielle (ou force de frottement) $\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}$.



Physiquement, ces deux composantes ont des origines différentes.

- La composante normale empêche l’interpénétration des solides. Elle a pour origine les forces inter-atomiques. Elle est toujours dirigée vers le solide sur lequel elle s’applique.
- La force de frottement dépend très fortement de l’état (propre, présence d’impuretés, lisse, rugueux,...) et de la nature chimique des surfaces en contact.

Comme on l’a dit précédemment, l’énoncé des lois de Coulomb nécessite de distinguer deux cas cinématiques, le cas du glissement et le cas du non glissement.

- La vitesse de glissement est nulle (il n’y a pas de glissement).

$$\vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{0}$$

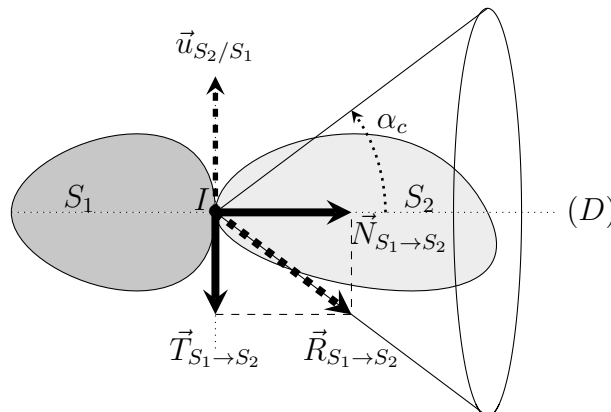
Dans ce cas :

$$\|\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\| = f_c \|\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\|$$

et

$$\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \text{ est opposé au vecteur } \vec{u}_{S_2/S_1}.$$

f_c est le coefficient de frottement *cinétique*. C’est une constante dépendant de l’état et de la nature des surfaces en contact. Les valeurs de f_c sont en général comprises entre 0,05 (surfaces lisses, peu d’adhérence) et 1,2 (frottements très importants).



Interprétation géométrique

Considérons le cône d'axe (D) et de demi-angle au sommet $\alpha_c = \arctan(f_c)$. Dans ce cas, la réaction $\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}$ est portée par le cône.

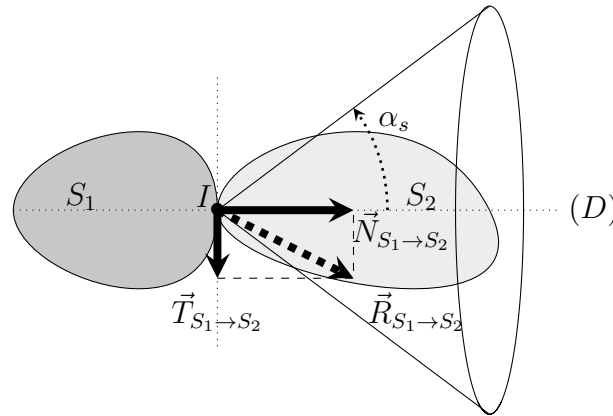
- La vitesse de glissement est non nulle (il y a glissement).

$$\vec{u}_{S_2/S_1} \neq \vec{0}.$$

Alors,

$$\|\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\| \leq f_s \|\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\|.$$

f_s est le coefficient de frottement *statique*. Comme f_c , f_s dépend des surfaces en contact. Les valeurs de f_s sont proches de celles de f_c mais légèrement supérieures.



Dans la grande majorité des exercices, ces deux coefficients sont confondus.

Interprétation géométrique

Considérons le cône d'axe (D) et de demi-angle au sommet $\alpha_s = \arctan(f_s)$. Dans ce cas, la réaction $\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}$ est à l'intérieur du cône.

Dans le cas du non glissement, la relation de Coulomb est une *inégalité*. Elle ne peut fournir de relation servant à établir une équation du mouvement mais donne une *condition* sur la nature du mouvement. De plus, contrairement au cas précédent, il n'y a aucune indication sur la direction de la force de frottement.

Les équations énergétiques (théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique, théorèmes de l'énergie et de la puissance mécanique) nécessitent de connaître la puissance des forces de contact.

La puissance P des forces de réaction $\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}$ et $\vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1}$ s'écrit :

$$P = \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} \cdot \vec{v}(A_1) + \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{v}(A_2).$$

D'après le principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction),

$$\vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = -\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P &= -\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{v}(A_1) + \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{v}(A_2) \\ &= (-\vec{v}(A_1) + \vec{v}(A_2)) \cdot \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ &= \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ &= \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot (\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} + \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}) \\ &= \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} + \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2} \end{aligned}$$

or, \vec{u}_{S_2/S_1} est dans le plan (π) , donc est normal à $\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}$ d'où :

$$P = \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}.$$

Il y a ainsi deux cas où la puissance P des forces de contact est nulle :

- soit il n'y a pas de frottement, car $\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} = \vec{0}$
- soit il n'y a pas de glissement, par exemple dans le cas du roulement sans glissement, car $\vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{0}$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau :

Lois de Coulomb	Glissement $\vec{u}_{S_2/S_1} \neq \vec{0}$	Pas de glissement $\vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{0}$
Frottements $f_s \geq f_c \neq 0$	$\ \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\ = f_c \ \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\ $ $P < 0$	$\ \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\ \leq f_s \ \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\ $ $P = 0$
Pas de frottement $f_c = f_s = 0$	$\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} = \vec{0}$ $P = 0$	$\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} = \vec{0}$ $P = 0$

Attention : la puissance des forces de contact sur *un seul des solides* n'est pas obligatoirement nulle, même si $P = 0$!

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la notion de glissement et de non glissement. Le non glissement n'impose l'immobilité (relativement au second solide) qu'à un seul point, le point de contact. Un solide peut rouler sans glisser sur un autre solide.

♡ Il faut se souvenir que les lois de Coulomb, qui sont des lois empiriques, fournissent une égalité dans le cas du glissement et une inégalité dans le cas du non glissement.

♡ Il faut se souvenir qu'en l'absence de frottement, il y a en général glissement (sur une surface très lisse par exemple) alors que le non glissement nécessite des forces de frottements (sur une surface rugueuse).

♡ Il faut se souvenir que la puissance des forces de contact est nulle s'il n'y a pas de frottement ou s'il n'y a pas de glissement.

Formulaire

- On résume les lois de Coulomb à :

$$\begin{aligned}\vec{u}_{S_2/S_1} \neq \vec{0} &\implies \|\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\| = f_c \|\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\| \text{ et } \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \text{ opposé à } \vec{u}_{S_2/S_1}; \\ \vec{u}_{S_2/S_1} = \vec{0} &\implies \|\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\| \leq f_s \|\vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}\|.\end{aligned}$$

- La puissance des forces de contact sur un seul solide, S_2 par exemple, est

$$P_2 = \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{v}(A_2).$$

- La puissance P des forces de contact sur les deux solides est

$$P = \vec{u}_{S_2/S_1} \cdot \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2}.$$