I.1 – Reprenez les bases de l'arithmétique

1.a – Les nombres : naturels, relatifs, décimaux et réels

L'essentiel à savoir

Les nombres entiers naturels : Il s'agit de l'ensemble des nombres entiers (sans décimale ou sans virgule) positifs, 0 inclus.

Ex. : 0 ; 2 ; 13 ; 258 ; 1 239 ; 1 023 658 ; …

Les nombres entiers relatifs : Il s'agit de l'ensemble des nombres entiers naturels et des nombres entiers précédés du signe – (les entiers négatifs).

Ex. : 0 ; -2 ; 13 ; -258 ; 1 239 ; -1 023 658 ; …

Les nombres décimaux : Il s'agit de l'ensemble des nombres qui sont des divisions de nombres entiers par des puissances positives de 10 (i.e. des nombres à virgule « finis »).

Ex. : 0,02 ; 2,87 ; 13,1285 ; 258,587 ; …

Les nombres rationnels : Il s'agit de l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous forme fractionnaire $\frac{n}{d}$ avec n et d entiers relatifs.

Ex. : $\frac{2}{3}$ ou 0,66666 ; …

Les nombres irrationnels : Il s'agit de l'ensemble des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire.

Ex. : $\sqrt{2}$; $\sqrt[5]{158}$; π ;…

Les nombres réels : Il s'agit de l'ensemble des nombres positifs, négatifs ou nuls, ayant une représentation décimale finie ou infinie. (i.e. l'ensemble des nombres entiers, des décimaux, des rationnels et des irrationnels).
C'est l'ensemble le plus large sur lequel vous serez amenés à travailler dans les tests.

Astuce : Il est important de différencier les **nombres** et les **chiffres**.
Les chiffres (nous utilisons les chiffres arabes) sont les symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui combinés forment des nombres.
Dans un nombre, le chiffre le plus à droite est appelé l'unité, le suivant vers la gauche la dizaine, le suivant la centaine, le millier, etc. Si le nombre possède des décimales, on trouve de gauche à droite après la virgule, les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc.

Savoir-faire. Question de concours.
Combien de chiffres sont écrits lorsqu'on écrit tous les nombres de 1 à 100 ?

a) 99
b) 100
c) 187
d) 192
e) 203

☑ Correction
Il faut dans cette question bien différencier les chiffres et les nombres.
De 1 à 9, j'écris 9 nombres à un chiffre, donc : 9 chiffres
De 10 à 99, j'écris 90 nombres à deux chiffres, donc : 180 chiffres
100 est un nombre à trois chiffres, j'écris donc : 3 chiffres
Soit au total 192 chiffres.

Réponse d).

1.b – Opérations basiques et tables de multiplication

Je vous l'ai dit, le secret pour obtenir un bon score en calcul c'est de gagner en rapidité. Vous ne pourrez atteindre cet objectif sans maîtriser parfaitement les bases du calcul et sans connaître vos tables de multiplication.

L'essentiel à savoir

Les 4 opérations de base sur les nombres sont :

Opération	Signe	Résultat
Addition	+	somme
Soustraction	-	différence
Multiplication	X ou .	produit
Division	÷ ou /	quotient

Signes.
Rappelons que le produit ou le quotient de deux nombres négatifs donne un résultat positif.

Priorités dans les calculs.
Lorsque vous devez calculer une série d'opérations, calculez en priorité ce qui se trouve dans les parenthèses (s'il y en a), puis, les multiplications et les divisions. Et enfin, les additions et soustractions de gauche à droite.

La distributivité.

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$a\times(b-c)=a\times b-a\times c$

$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$

$c\times(a+b)+d\times(a+b)=(a+b)\times(c+d)$

Il n'est pas inutile dans cette partie de vous rappeler comment poser un calcul !

Méthode. Poser une addition

Etape 1	Etape 2	Etape 3
$\begin{array}{r} 475 \\ +\ 353 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{1}475 \\ +\ 353 \\ \hline 28 \end{array}$	$\begin{array}{r} ^{1}475 \\ +\ 353 \\ \hline 828 \end{array}$

Méthode. Poser une soustraction

Etape 1	Etape 2	Etape 3
$\begin{array}{r} 918 \\ -\ 556 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9\,{}_{1}18 \\ -\ {}_{1}556 \\ \hline 62 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9\,{}_{1}18 \\ -\ {}_{1}556 \\ \hline 362 \end{array}$

Méthode. Poser une multiplication

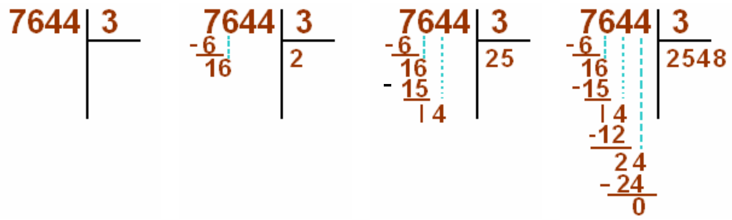
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4
$\begin{array}{r} 374 \\ \times\ 292 \\ \hline 748 \end{array}$	$\begin{array}{r} 374 \\ \times\ 292 \\ \hline 748 \\ 3366\,. \end{array}$	$\begin{array}{r} 374 \\ \times\ 292 \\ \hline 748 \\ 3366\,. \\ 748\,.\,. \end{array}$	$\begin{array}{r} 374 \\ \times\ 292 \\ \hline 748 \\ 3366\,. \\ 748\,.\,. \\ \hline 109208 \end{array}$

Pour une multiplication avec virgules, posez votre multiplication sans prendre en compte la virgule puis placez la virgule dans le résultat final en comptant le nombre total de chiffres après la virgule dans les deux nombres de départ.

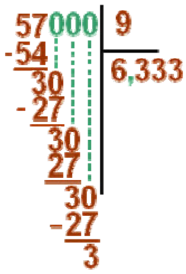
$$\begin{array}{r} 45{,}6 \\ \times\ \ 6{,}45 \\ \hline 2280 \\ 1824\,. \\ 2736\,.\,. \\ \hline 294{,}120 \end{array}$$

Méthode. Poser une division

Etape 1 Etape 2 Etape 3 Etape 4



Pour une division avec virgules :



Les tables de multiplication.

Je vous conseille vivement de **réapprendre (apprendre ?) vos tables de multiplication de 1 à 15**.

Recopiez-les, affichez-les, récitez-les… peu importe la méthode, sachez-les ! Comme il vous faut maîtriser l'alphabet avant d'écrire, les tables de multiplication sont la base de l'arithmétique.

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64
9	9	18	27	36	45	54	63	72
10	10	20	30	40	50	60	70	80
11	11	22	33	44	55	66	77	88
12	12	24	36	48	60	72	84	96
13	13	26	39	52	65	78	91	104
14	14	28	42	56	70	84	98	112
15	15	30	45	60	75	90	105	120

×	9	10	11	12	13	14	15
1	9	10	11	12	13	14	15
2	18	20	22	24	26	28	30
3	27	30	33	36	39	42	45
4	36	40	44	48	52	56	60
5	45	50	55	60	65	70	75
6	54	60	66	72	78	84	90
7	63	70	77	84	91	98	105
8	72	80	88	96	104	112	120
9	81	90	99	108	117	126	135
10	90	100	110	120	130	140	150
11	99	110	121	132	143	154	165
12	108	120	132	144	156	168	180
13	117	130	143	156	169	182	195
14	126	140	154	168	182	196	210
15	135	150	165	180	195	210	225

1.c – Division euclidienne, multiples, décomposition en facteurs premiers, divisibilité

L'essentiel à savoir

La division euclidienne. Si a et b sont deux entiers relatifs avec b différent de 0, il existe des entiers q et r déterminés de manière unique par les conditions suivantes :

$\mathbf{a = b \times q + r}$ avec r compris entre 0 et (b – 1)

q s'appelle le **quotient** de la division de a par b.
r s'appelle le **reste** de la division de a par b.

Ex. : Divisons 156 par 9
156 divisé par 9 donne 17 et il reste 3 [$156 - 17 \times 9 = 3$]
17 est donc le quotient et 3 le reste

Multiples, Facteurs et Diviseurs. Si le reste est nul, il existe un entier q tel que $\mathbf{a = b \times q}$
On dit alors que a est un **multiple** de b ou a est divisible par b.
On dit aussi que b et q sont des **facteurs** de a (ou des diviseurs).

Ex. : $204 = 17 \times 12$
204 est donc un multiple de 17 et de 12
204 est divisible par 17 et 12
17 et 12 sont des facteurs de 204

Décomposition en facteurs premiers. Tout entier naturel supérieur à 1 peut être décomposé d'une manière unique en un produit de nombres premiers.

Ex. : La décomposition de 495 donne $11 \times 9 \times 5$

Divisibilité. De nombreuses questions portent sur la divisibilité tant en calcul qu'en conditions minimales ou en logique, il faut donc connaître parfaitement les critères de divisibilité.

Méthode. Critères de divisibilité

- **Critère de divisibilité par 2**

Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si N est pair, i.e. s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.

- **Critère de divisibilité par 3**

Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 215 est divisible par 3 car $1 + 2 + 1 + 5 = 9$ et, 9 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 4**

Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 4 car 16 est divisible par 4.

- **Critère de divisibilité par 5**

Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si N se termine par 0 ou 5.

- **Critère de divisibilité par 6**

Un nombre N est divisible par 6 si et seulement si N est à la fois divisible par 2 **et** par 3 ; c'est à dire s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 716 est divisible par 6 car il est pair et divisible par 3

- **Critère de divisibilité par 7**

Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si en calculant la somme de ses chiffres pris à partir de la droite multipliés respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, … le résultat est un multiple de 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car, $3\times1 + 1\times3 + 4\times2 = 14$
et, 14 est divisible par 7

Autre méthode pour un entier à 3 chiffres : un entier à trois chiffres CDU est divisible par 7 si et seulement si [CD – 2U] est divisible par 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car, $41 - 2\times3 = 35$ et, 35 est divisible par 7

Inutile de vous faire remarquer que ces critères sont extrêmement compliqués à appliquer. Ainsi, le meilleur moyen de déterminer la divisibilité d'un nombre par 7 est de connaître la table des 7 et de décomposer ce nombre en multiple(s) de 7.

Ex. : 413 peut se décomposer en multiples évidents de 7.
$413 = 420 - 7$ Donc, $413 = 6\times7\times10 - 7 = 59\times7$!

- **Critère de divisibilité par 8**

Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 8 car 216 est divisible par 8

- **Critère de divisibilité par 9**

Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Ex. : 7 218 est divisible par 9 car 7 + 2 + 1 + 8 = 18
et, 18 est divisible par 9

- **Critère de divisibilité par 10**

Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si N se termine par 0.

- **Critère de divisibilité par 11**

Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par 11.
Pour un entier à trois chiffres, la somme des unités et des centaines est égale au chiffre des dizaines (attention, c'est un critère de divisibilité et pas de non-divisibilité).

Ex. : 495 est divisible par 11 car $(4 + 5) – 9 = 0$
8 690 est un multiple de 11 car, $(8 + 9) – (6 + 0) = 11$

- **Critère de divisibilité par 13** (pour un nombre à trois chiffres)

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 13 si et seulement si (CD + 4U) est divisible par 13.

Ex. : 637 est divisible par 13 car $63 + 4\times7 = 91$ et 91 est divisible par 13

- **Critère de divisibilité par 17** (pour un nombre à trois chiffres)

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 17 si et seulement si (CD - 5U) est divisible par 17.

Ex. : 476 est divisible par 17 car $47 - 5\times6 = 17$ et, 17 est divisible par 17

Astuce : La technique de décomposition de nombres est **LA** méthode-clé pour gagner en rapidité de calcul. Elle est très utile pour réduire des fractions, effectuer mentalement une division ou une multiplication : la décomposition vous permet de travailler avec des nombres simples. Devenue un réflexe, cette méthode vous fera gagner un temps précieux le jour du concours. Entraînez-vous !

Savoir-faire. Question de concours.
Que vaut le septième du douzième de 1 512 ?

a) 20
b) 16
c) 22
d) 14
e) 18