



Ressources informatiques

 + QUIZ

Version en ligne
OFFERTE !
pendant 1 an

Python

Introduction au calcul numérique

En téléchargement

 scripts

Michel ROUSSELET





Les éléments à télécharger sont disponibles à l'adresse suivante :
<http://www.editions-eni.fr>
Saisissez la référence ENI de l'ouvrage **RIPYTCN** dans la zone de recherche et validez. Cliquez sur le titre du livre puis sur le bouton de téléchargement.

Avant-propos

Chapitre 1

Nombres, opérations et fonctions dans Python

1. Nombres et opérations	17
1.1 Entiers et décimaux	17
1.2 Les variables numériques	18
1.3 L'opérateur d'affectation =	18
1.4 Les opérations disponibles dans Python	19
1.5 Les expressions numériques	19
1.6 Les opérateurs de comparaison	20
1.7 Le module « fractions »	21
1.8 Deux autres instructions du module « fractions »	22
2. Représentation des nombres	23
2.1 Historique	23
2.2 La représentation binaire des entiers naturels	24
2.3 La représentation binaire des entiers relatifs	25
2.4 Les nombres dyadiques	25
2.5 La représentation des nombres à virgule à l'aide des « flottants »	26
2.6 La précision des calculs	27
3. Fonctions disponibles dans Python	29
3.1 Les fonctions usuelles	29
3.2 Les fonctions numériques du module « math »	30
3.3 Comment définir ses propres fonctions ?	31

3.4	Définir une fonction par une suite d'actions	32
3.5	Le mot réservé « lambda »	33
4.	La récursivité des fonctions	35
4.1	Les factorielles	35
4.2	Une application de la récursivité : les tours de Hanoï	37

Chapitre 2

Suites de nombres réels

1.	Suites et racines carrées	41
1.1	La méthode d'Archytas de Tarente	41
1.2	La méthode de Héron d'Alexandrie	43
1.3	Le calcul d'une racine cubique	45
2.	Comment définir une suite ?	47
2.1	Définition	47
2.2	Suites définies par $u_n = f(n)$	47
2.3	Suites récurrentes	48
3.	Quand n devient de plus en plus grand	51
3.1	Une suite peut être convergente	51
3.2	Une suite peut ne pas avoir de limite	53
4.	Une suite célèbre : la suite de Fibonacci	55
4.1	Historique	55
4.2	Le problème des lapins	56
4.3	L'étude du rapport de deux termes successifs de la suite	58
4.4	L'étude du nombre $ r_n - \varphi $	59
4.5	La formule de Binet	59
5.	Suites définies par des sommes	61
5.1	Historique	61
5.2	La somme des carrés et des cubes des entiers naturels de 1 à n	62
5.3	Les séries géométriques	63
5.4	La série de Swineshead	64
5.5	La série harmonique et la série harmonique alternée	65

5.6 Le problème de Bâle 66
 5.7 Le nombre e 67

Chapitre 3

Fonction exponentielle et fonctions logarithmes

1. La fonction exponentielle 69
 1.1 Historique 69
 1.2 Définition de la fonction exponentielle par Euler 70
 1.3 Dérivée de la fonction $x \rightarrow \exp(x)$ 71
 1.4 Autre définition de $\exp(x)$ 72
 1.5 Instructions $\exp(x)$ et $e^{**}x$ 73
 1.6 Représentation graphique de la fonction exponentielle $x \rightarrow \exp(x)$ 74
 2. Les logarithmes décimaux 75
 2.1 Historique 75
 2.2 Logarithme décimal d'un nombre strictement positif 76
 2.3 Fonction logarithme décimal dans Python 76
 2.4 Représentation graphique de la fonction logarithme décimal 77
 3. L'algorithme de Briggs 79
 3.1 Historique 79
 3.2 Un programme Python 80
 4. Les logarithmes népériens 83
 4.1 Historique 83
 4.2 Définition et calcul de $\ln(x)$ pour $x \geq 0$ 85
 4.3 Programme pour calculer un encadrement de $\ln(x)$ 86
 4.4 Fonction logarithme népérien dans Python 87

Chapitre 4

Dérivation numérique et équations différentielles

1. Dérivée d'une fonction numérique	89
1.1 Historique	89
1.2 Dérivées à droite et dérivées à gauche	90
1.3 Calculs approchés de $f'_d(x)$ et de $f'_g(x)$	92
1.4 Calcul approché de $f'(x)$ à l'aide de $f'_g(x_0)$ et de $f'_d(x_0)$	94
2. Calcul approché de $f'(x)$ et de $f''(x)$	95
2.1 Administration par un polynôme	95
2.2 Calcul d'une valeur approchée de $f'(x)$	96
2.3 Application à la fonction exponentielle	97
2.4 Approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0	98
2.5 Calcul approché de $f''(x)$	98
3. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?	101
3.1 Historique	101
3.2 Les équations du type $y'=f(x)$	103
3.3 Les équations du type $y'=ay$	103
3.4 Les équations du type $y'=ay+b$	104
3.5 Les équations linéaires du type $ay'+by=z$	105
3.6 La notation différentielle de Leibniz	106
4. La méthode d'Euler	109
4.1 Principe de la méthode d'Euler.	109
4.2 Un programme pour calculer $y(x)$	110
4.3 Influence du choix de n sur la précision des résultats	112
4.4 Construction d'une fonction Euler(x_0, y_0, x, n)	113
4.5 Un cas particulier : l'équation différentielle $y'=y$	114
5. Les méthodes de Runge-Kutta	117
5.1 Historique	117
5.2 Cas d'une équation différentielle du premier ordre	117
5.3 Cas d'une équation différentielle du second ordre	120

Chapitre 5

Résolution approchée des équations

- 1. La recherche d'une solution par dichotomie 123
 - 1.1 Historique 123
 - 1.2 Deux programmes 124
- 2. La méthode des approximations successives 129
 - 2.1 Historique 129
 - 2.2 Étude d'un exemple 130
 - 2.3 Deux programmes pour calculer r 133
- 3. La méthode de Newton 135
 - 3.1 Historique 135
 - 3.2 Extension de la méthode 136
 - 3.3 Représentation graphique de la méthode de Newton 138
 - 3.4 Deux programmes 138

Chapitre 6

Calcul infinitésimal et intégration numérique

- 1. Longueur d'un arc de courbe 141
 - 1.1 Principe du calcul 142
 - 1.2 Un programme de calcul 142
 - 1.3 Application : calcul du nombre π 143
- 2. Aire du disque et calcul de π 145
 - 2.1 Historique 145
 - 2.2 Méthode d'Archimède 145
 - 2.3 Avec le calcul infinitésimal 147
 - 2.4 Calcul de π par la méthode de Monte-Carlo. 148
- 3. Volume d'une boule 151
 - 3.1 Principe du calcul 151
 - 3.2 Le calcul. 151
 - 3.3 Programme de calcul. 153

4.	Intégration approchée par la méthode des rectangles	155
4.1	Historique	155
4.2	Principe de la méthode des rectangles	156
4.3	Programme pour calculer l'intégrale d'une fonction continue .	157
4.4	Cas des fonctions monotones	158
5.	Intégration approchée par la méthode des trapèzes	161
5.1	Rappel	161
5.2	Principe de la méthode des trapèzes	162
5.3	Programme pour calculer l'intégrale d'une fonction continue .	162
6.	Intégration approchée par la méthode de Simpson	165
6.1	Historique	165
6.2	Méthode de Simpson	165
6.3	Cas d'une intégrale avec une borne infinie	166
7.	Intégration approchée par la méthode de Gauss	169
7.1	Historique	169
7.2	Principe de la méthode de Gauss	169
7.3	Un programme de calcul	170
7.4	Deux remarques	171

Chapitre 7

Nombres complexes

1.	Les nombres complexes dans Python	173
1.1	Historique	173
1.2	Construction moderne des nombres imaginaires	175
1.3	Nombre complexe i et ses propriétés	176
1.4	Représentation algébrique d'un nombre complexe	176
1.5	Opérations sur les complexes dans Python	177
1.6	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	178
1.7	Forme exponentielle d'un nombre complexe	179

- 2. Résolution dans \mathbb{C} des équations du second degré 181
 - 2.1 Cas d'une équation à coefficients réels 181
 - 2.2 Cas d'une équation du second degré à coefficients complexes 182
- 3. Les suites de nombres complexes 185
 - 3.1 Suites récurrentes 185
 - 3.2 Partie réelle et partie imaginaire d'une suite complexe 185
 - 3.3 Convergence d'une suite. 186
 - 3.4 Une suite géométrique 188
 - 3.5 Représentation graphique d'une suite 189
- 4. Aperçu sur les fonctions d'une variable complexe 193
 - 4.1 Fonctions nouvelles 193
 - 4.2 La fonction $z \rightarrow z+a$ 193
 - 4.3 La fonction $z \rightarrow az$ avec $|a|=1$ 195
 - 4.4 La fonction $z \rightarrow az$ avec a réel 195
 - 4.5 Les fonctions homographiques complexes 196
 - 4.6 Les transformations homographiques du plan complexe 197

Chapitre 8
Éléments de statistiques

- 1. Les paramètres d'une série statistique 199
 - 1.1 Un exemple 199
 - 1.2 Construction du tableau des effectifs 200
 - 1.3 Calcul de la médiane. 201
 - 1.4 Calcul des quartiles Q_1 et Q_3 et
de l'écart interquartile Q_3-Q_1 202
 - 1.5 Calcul de la moyenne 203
 - 1.6 Calcul de la variance et de l'écart-type 203
- 2. Covariance et coefficient de corrélation 205
 - 2.1 Historique 205
 - 2.2 Définitions 206
 - 2.3 Un programme de calcul de $\text{cov}(x,y)$ et de r 206

3.	Ajustements linéaires et autres	209
3.1	Historique	209
3.2	Ajustement linéaire	209
3.3	Ajustement par une exponentielle	211
3.4	Ajustement par une fonction puissance	212

Chapitre 9 Combinatoire et échantillonnage

1.	Factorielles et combinaisons	215
1.1	Premières recherches	215
1.2	L'invention des factorielles	216
1.3	Les combinaisons de n objets pris p à p	217
1.4	Le calcul du nombre $\binom{n}{p}$	218
2.	Échantillonnage	221
2.1	Historique	221
2.2	Fabrication expérimentale d'un échantillon	221
2.3	Un calcul direct	222
3.	Échantillonnage et fréquences	225
3.1	Fluctuations d'échantillonnage	225
3.2	Intervalle de fluctuation de la fréquence d'un échantillon	226
3.3	Estimation de la fréquence d'un caractère dans une population	227
3.4	Quelques remarques	229

Chapitre 10 Les probabilités

1.	Les probabilités conditionnelles	231
1.1	Une simulation pour conjecturer	231
1.2	Le calcul confirme la conjecture	234
1.3	Une formule pour définir une probabilité conditionnelle	234

1.4	Un exemple	235
2.	La formule de Bayes	237
2.1	Historique	237
2.2	La formule de Bayes	237
2.3	Une première simulation	238
2.4	Une deuxième simulation	239
3.	L'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire discrète	243
3.1	Variables aléatoires discrètes	243
3.2	Variables aléatoires et lois de probabilité	243
3.3	Espérance mathématique d'une variable aléatoire	243
3.4	Variance et écart-type d'une variable aléatoire X	244
3.5	Un programme pour calculer $E(X)$, $V(X)$ et (X)	245
4.	La loi binomiale.	247
4.1	Expériences et schémas de Bernoulli	247
4.2	Étude d'un exemple	248
4.3	Une généralisation : la loi binomiale	248
4.4	Un programme pour calculer $P(X=k)$	249
4.5	Un programme pour calculer $P(X \leq k)$	250
4.6	Espérance et écart-type	251
5.	La loi de Poisson	253
5.1	Historique	253
5.2	Expression de la loi de Poisson.	253
5.3	Exemples	254
5.4	Loi de Poisson et loi binomiale.	255
6.	Les variables aléatoires continues	257
6.1	Historique	257
6.2	Qu'est-ce qu'une variable aléatoire continue ?	258
6.3	Comment définir une loi de probabilité continue ?	259
6.4	Espérance et écart-type d'une variable aléatoire continue	260
7.	La loi exponentielle.	261
7.1	À quoi sert cette loi ?	261
7.2	Définition	261

7.3	Espérance et variance d'une loi exponentielle.	262
7.4	Calcul de la probabilité $P(a < X < b)$	262
7.5	Application à la physique.	263
7.6	Usure et vieillissement	264
8.	La loi normale	265
8.1	Définition	265
8.2	Loi normale réduite	266
8.3	Calcul de $P(X < a)$	267
8.4	Calcul inverse	268
8.5	Exemple d'utilisation de la loi normale	269
9.	Loi normale et jugements statistiques	271
9.1	Intervalle de fluctuation d'une moyenne	271
9.2	Intervalle de fluctuation d'une fréquence	272
9.3	Intervalle de confiance d'une moyenne.	274
9.4	Intervalle de confiance d'une fréquence	275

Chapitre 11

Arithmétique et cryptographie

1.	La division euclidienne des entiers	277
1.1	Deux fonctions de Python	277
1.2	La division euclidienne des entiers relatifs	278
2.	Les diviseurs d'un entier naturel	281
2.1	Recherche des diviseurs d'un entier naturel	281
2.2	Somme des diviseurs propres d'un entier	283
2.3	Nombres parfaits	284
2.4	Nombres amicaux.	285
3.	Les nombres premiers.	287
3.1	Les nombres premiers sont en nombre infini	287
3.2	Le crible d'Ératosthène	287
3.3	Comment savoir si un entier donné est premier ?	288
3.4	Des listes de nombres premiers	289

3.5	La conjecture des nombres premiers jumeaux	290
3.6	La conjecture de Goldbach	291
4.	Le PGCD de deux entiers	293
4.1	L'algorithme d'Euclide	293
4.2	La méthode des divisions successives	294
4.3	La fonction pgcd dans Python	295
5.	Les factorisations d'un entier naturel	297
5.1	Décomposition en facteurs premiers	297
5.2	Décomposition en facteurs premiers et recherche d'un PGCD	298
5.3	Une autre méthode de factorisation	299
5.4	Méthode de Fermat	301
6.	Le théorème de Bezout	305
6.1	Historique	305
6.2	Deux exemples	306
6.3	Recherche des coefficients de Bezout avec Python	307
6.4	Conséquence du théorème de Bezout, le théorème de Gauss	309
7.	Introduction aux équations diophantiennes	311
7.1	Historique	311
7.2	Un exemple d'équation diophantienne	312
7.3	Un autre exemple	313
7.4	Un programme pour résoudre l'équation $ax+by=c$	314
7.5	Une équation diophantienne du second degré	315
8.	La congruence des entiers relatifs	317
8.1	Le terme « modulo »	317
8.2	Calcul des restes modulo n	318
8.3	Calculs modulo n et calculs dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	319
8.4	Résolution de l'équation $ax+b=c$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	322
9.	Le code secret de Jules César	323
9.1	Historique	323
9.2	Les instructions <code>ord()</code> et <code>chr()</code> de Python	323
9.3	Un programme pour coder un texte	324

9.4	Un programme pour décoder un texte quand on connaît le décalage	325
9.5	Décodage avec une analyse des fréquences des lettres.	325
9.6	Un programme de décodage quand on ne connaît pas le décalage employé	326
10.	Le chiffre de Vigenère	329
10.1	Historique	329
10.2	Principe du chiffre de Vigenère	330
10.3	Un programme de chiffrement et de déchiffrement	331
11.	Les codages affines	335
11.1	Une convention	335
11.2	Un programme pour coder un texte	335
11.3	Comment choisir les entiers a et b ?	336
11.4	Décodage d'un texte codé par une fonction affine avec a et b connus	337
11.5	Décodage d'un texte codé par une fonction affine avec a et b inconnus	338
11.6	Un programme général de décodage	338
12.	Le chiffrement de Hill	341
12.1	Principe du chiffrement	341
12.2	Un exemple	341
12.3	Principe du déchiffrement	342
12.4	Un programme pour coder	343
12.5	Un programme pour décoder	344

Chapitre 12

Matrices 2x2 et matrices 3x3

1.	Matrices carrées et applications linéaires	349
1.1	Historique	349
1.2	Une matrice représente une application linéaire	350
1.3	Représentation d'une matrice avec Python.	352
1.4	Image d'un vecteur par une matrice carrée 2x2 ou 3x3	353

2.	Opérations sur les matrices	355
2.1	Addition, soustraction et multiplication par un réel	355
2.2	Multiplication des matrices carrées de taille 2	356
2.3	Propriétés particulières de la multiplication des matrices	357
2.4	Un programme pour multiplier des matrices 2x2	358
2.5	Un programme pour multiplier des matrices 3x3	359
2.6	Multiplication de deux matrices de tailles différentes	360
2.7	Opérations avec des matrices carrées remarquables	361
3.	Déterminant d'une matrice carrée 2x2 ou 3x3	363
3.1	Déterminant d'une matrice 2x2	363
3.2	Déterminant d'une matrice 3x3	364
3.3	Déterminant d'un système de vecteurs	366
4.	Inversion des matrices carrées 2x2 et 3x3	367
4.1	Qu'est-ce qu'une matrice inversible ?	367
4.2	Inverse d'une matrice carrée 2x2	368
4.3	Inverse d'une matrice carrée 3x3	369
4.4	Méthode du pivot	370
5.	Résolution d'un système linéaire d'équations	373
5.1	Un exemple historique	373
5.2	Écriture matricielle des systèmes linéaires d'équations	374
5.3	Un programme pour résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues	375
5.4	Un programme pour résoudre les systèmes de trois équations à trois inconnues	376
5.5	Remarque sur l'emploi des déterminants	377
6.	Puissances d'une matrice 2x2 ou 3x3	379
6.1	Puissance d'une matrice 2x2	379
6.2	Puissance d'une matrice 3x3	380
6.3	Cas des matrices diagonales	381
7.	Diagonalisation d'une matrice 2x2	383
7.1	Les matrices diagonalisables	383
7.2	Étude d'un exemple	383

7.3	Diagonalisation d'une matrice 2×2	385
7.4	Un programme pour calculer les valeurs propres d'une matrice 2×2	386
8.	Matrices et suites récurrentes	389
8.1	Rappel : les nombres de Fibonacci	389
8.2	Calcul des nombres de Fibonacci à l'aide d'une matrice 2×2 . .	389
8.3	Les relations de Binet	390

Chapitre 13

Géométrie analytique

1.	Équation réduite d'une droite dans le plan	393
1.1	Historique	393
1.2	Détermination de l'équation réduite d'une droite	394
1.3	Intersection de deux droites	397
1.4	Distance d'un point à une droite	398
2.	Équation cartésienne d'une droite dans le plan	401
2.1	Historique	401
2.2	Recherche de l'équation cartésienne d'une droite dont on connaît deux points	401
2.3	Recherche de l'équation cartésienne d'une droite dont on connaît un vecteur directeur et un point	403
2.4	Intersection de deux droites	404
2.5	Droites parallèles	405
2.6	Vecteurs orthogonaux, vecteur normal à une droite	406
2.7	Droites perpendiculaires	407
3.	Droites dans l'espace	409
3.1	Vecteurs colinéaires dans l'espace	409
3.2	Points alignés	409
3.3	Représentation paramétrique d'une droite	410
3.4	Comment reconnaître qu'un point appartient à une droite ? .	411
3.5	Droites coplanaires, intersection de deux droites	412

- 4. Équations paramétriques d'un plan 415
 - 4.1 Historique 415
 - 4.2 Détermination de l'équation paramétrique d'un plan 416
 - 4.3 Comment reconnaître qu'un point appartient à un plan ? . . . 417
 - 4.4 Comment reconnaître que quatre points sont coplanaires ? . 418
 - 4.5 Intersection d'un plan et d'une droite 419
- 5. Équation cartésienne d'un plan 423
 - 5.1 Produit scalaire de 2 vecteurs 423
 - 5.2 Équation d'un plan défini par un de ses points
et par un vecteur normal 423
 - 5.3 Équation d'un plan défini par trois points non alignés 424
 - 5.4 Intersection d'une droite et d'un plan 427
 - 5.5 Distance d'un point à un plan 428
 - 5.6 Intersection de deux plans 430

Annexes

- 1. Bibliographie 433
- 2. Comment utiliser les scripts du livre ? 437

Notes 439

Index 441

Chapitre 2

Suites de nombres réels

1. Suites et racines carrées

L'idée de répéter un calcul en changeant les nombres utilisés à chaque étape est très ancienne puisqu'on en trouve la trace à Babylone, 1800 ans avant J.-C. En Grèce, on a souvent eu recours aux suites pour calculer des racines carrées.

1.1 La méthode d'Archytas de Tarente

Archytas de Tarente (vers 435 av. J.-C. ; 347 av. J.-C) était un disciple de Pythagore. Ses travaux ont concerné la notion de moyenne. Étant donnés deux nombres a et b , leur moyenne arithmétique m est égale à $\frac{a+b}{2}$, leur moyenne géométrique g est définie par $g^2 = ab$ et leur moyenne harmonique h est définie par $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. On démontre que $h < g < m$. Archytas de Tarente a utilisé cette relation pour calculer des racines carrées.

Par exemple, pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{3}$, il commence par écrire $3 = 2 \times \frac{3}{2}$ puis, comme le montre le tableau suivant, il déroule ses calculs :

Étape n°	x	y	Moyenne arithmétique de x et de y	Moyenne harmonique de x et de y
1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{7}$
2	$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{168}{97}$
3	$\frac{97}{56}$	$\frac{168}{97}$	$\frac{18817}{10864}$	$\frac{32592}{18817}$

Avec les notations actuelles, on peut écrire $\frac{18817}{10864} = 1,73205081\dots$ et

$\frac{32592}{18817} = 1,732050805\dots$. Le nombre $\sqrt{3}$ est connu avec une erreur qui porte sur

la 9^e décimale seulement. On peut généraliser la méthode d'Archytas de Tarente à un nombre réel positif A quelconque en utilisant le programme qui suit :

```
# Calcul d'une racine carrée avec la méthode d'Archytas de Tarente
A=eval(input("Valeur de A : "))
x,y=2,A/2
for i in range(1,6):
    m=(x+y)/2
    h=x*y/m
    print("x=",x," et y=",y)
    x,y=m,h
```

On a choisi de faire le calcul en cinq étapes car l'algorithme est très performant.

Voici par exemple le calcul de $\sqrt{2}$:

```
Valeur de A : 2
x= 2 et y= 1.0
x= 1.5 et y= 1.3333333333333333
x= 1.4166666666666665 et y= 1.411764705882353
x= 1.4142156862745097 et y= 1.41421143847487
x= 1.4142135623746899 et y= 1.4142135623715
```

1.2 La méthode de Héron d'Alexandrie

Au I^{er} siècle après J.-C., le mathématicien et ingénieur grec Héron d'Alexandrie (75-150) a exposé une méthode² très rapide et très simple pour calculer la racine carrée d'un nombre réel A positif. On choisit une valeur approchée quelconque u de \sqrt{A} et on calcule $v = \frac{1}{2}(u + \frac{A}{u})$. Il est facile de voir que \sqrt{A} est compris entre u et v . On recommence le calcul en remplaçant u par v et on continue ainsi jusqu'à atteindre la précision désirée. Ainsi, le tableau qui suit montre les cinq premières étapes du calcul de $\sqrt{5}$.

Étape n°	u	v
1	3.0	2.3333333333333335
2	2.3333333333333335	2.238095238095238
3	2.238095238095238	2.2360688956433634
4	2.2360688956433634	2.236067977499978
5	2.236067977499978	2.23606797749979

On peut généraliser la méthode de Héron d'Alexandrie à un nombre réel positif A quelconque avec ce programme :

```
# Calcul d'une racine carrée avec la méthode de Héron d'Alexandrie
A=eval(input("Valeur du nombre A ? "))
n=eval(input("Valeur de n ? "))
u=A/2
for i in range(1,n+1):
    v=(u+A/u)/2
    print(v)
    u=v
```

Pour calculer \sqrt{A} quand A est positif, on peut choisir un nombre positif quelconque comme première approximation de \sqrt{A} , y compris le nombre A lui-même. Calculons par exemple les 8 premières valeurs approchées de $\sqrt{10}$ avec ce programme :

```
from math import*
a=10
n=8
u=a
for i in range(1,n+1):
    v=(u+a/u)/2
    print(v)
    u=v
```

On obtient ces résultats :

```
3.659090909090909
3.196005081874647
3.16245562280389
3.162277665175675
3.162277660168379
3.162277660168379
3.162277660168379
3.162277660168379
```

Dès la cinquième approximation, on a obtenu 15 décimales exactes. On démontre que la suite des approximations de $\sqrt{10}$ est illimitée. Le développement décimal de $\sqrt{10}$ possède donc une infinité de décimales. En effet, $\sqrt{10}$ est un nombre irrationnel qui ne peut pas être représenté exactement par une fraction. C'est aussi un nombre algébrique qui vérifie l'équation $x^2=10$.

1.3 Le calcul d'une racine cubique

On peut généraliser la méthode de Héron et calculer la racine cubique d'un nombre positif a . Si x_{n-1} est une valeur approchée de cette racine, la valeur

approchée suivante x_n est donnée par le calcul $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^2} \right)$. Le pro-

gramme qui suit calcule des valeurs approchées successives u et v de $\sqrt[3]{a}$. Le calcul est arrêté quand $|v-u| < 10^{-6}$. Comme Python peut calculer $\sqrt[3]{a}$, on pourra comparer la valeur exacte à la valeur calculée.

```
# Calcul d'une racine cubique. Méthode de Héron d'Alexandrie
from math import*
a=eval(input("Valeur du nombre positif a ? "))
u=a/3
v=u/2+a/(2*u*u)
e=abs(u-v)
while e>0.000001:
    u=v/2+a/(2*v*v)
    e=abs(v-u)
    v=u
print("Valeur approchée de la racine cubique de ",a," =",v)
print("Valeur exacte selon Python = ", a**(1/3))
```

Voici le résultat obtenu pour $a=100$:

```
Valeur du nombre positif a ? 100
Valeur approchée de la racine cubique de 100 = 4.641589088997662
Valeur exacte selon Python = 4.641588833612778
```

