LE CARRÉ NATUREL

PROBLÈMES ET JEUX

Du même auteur

LES CARRÉS MAGIQUES, HISTOIRE, THÉORIE ET TECHNIQUE DU CARRÉ MAGIQUES
DEPUIS L'ANTIQUITÉ JUSQU'AUX RECHERCHES ACTUELLES
VUIBERT, SECONDE ÉDITION, 2000.

LA MAGIE DU CARRÉ, LE CARRÉ DANS TOUS SES ÉCLATS
VUIBERT, 2004.

Collection La Science au Quotidien

René DESCOMBES

LE CARRÉ NATUREL

PROBLÈMES ET JEUX

nuvis

« Une passion chasse l’autre, et celle du jeu est la première de toutes : l’amour et
l’ambition s’émoussent en vieillissant,
le jeu reverdit quand tout le reste se passe. »
Abbé de Choisy (1644 – 1724) –
Mémoires de l’abbé de Choisy habillé en femme – Chap. I.

« Tricher au jeu sans gagner est d’un sot. »
Voltaire (1694 – 1778) –
Satires – Défense du mondain ou l’apologie du luxe.

« La passion du jeu est une des moins dissimulées.
Elle se manifeste soit dans le gain, soit dans la perte
par des symptômes frappants. »
Denis Diderot (1713 – 1784) – Les bijoux indiscrets, Chap. 2.

« Si terrible que soit la vie, l’existence de l’activité créatrice
sans autre but qu’elle-même suffit à la justifier.
Le jeu, évidemment, paraît au premier abord, le moins utile de nos gestes, mais il devient
de plus en plus utile dès que nous constatons
qu’il multiplie notre ferveur à vivre et nous fait oublier la mort. »
Elie Faure (1873 – 1937) – L’esprit des formes II – Utilisation de la mort.

Préface

Quoi de plus répandu que le carré, ce polygone régulier à quatre côtés qui est à la fois un rectangle et un losange ? Ses premières représentations datent de la nuit des temps. Il est, avec le cercle et le triangle, l'une des figures géométriques remarquables les plus étudiées et l'on a depuis longtemps coutume de dire qu'il représente l'univers rationnel. Mais la *magie du carré* commence avec le carré naturel, un simple carré subdivisé par un nombre égal de lignes et de colonnes. Dans les n^2 cases ainsi constituées de ce « carré d'ordre *n* », on fait figurer les *n* premiers nombres entiers.

D'innombrables représentations de carrés naturels nous entourent. Ainsi, le clavier d'un téléphone, qui permet de saisir le numéro de notre correspondant. De même le « digicode », cette serrure électronique qui permet d'ouvrir la porte d'un immeuble en saisissant un code secret sur un pavé numérique. L'échiquier du jeu d'Échecs, le damier du jeu de Dames sont également des représentations d'un carré naturel (d'ordre 8 pour l'un, d'ordre 10 pour l'autre, du moins en France) d'où, il est vrai, les nombres entiers sont absents. Et que dire du jeu de Sudoku qui envahit les loisirs de certains ? Il est constitué de 9 carrés naturels accolés que l'on peut remplir d'une seule façon, par simple déduction, à partir de quelques nombres donnés au départ.

Les plus sophistiqués des carrés naturels sont probablement les carrés magiques. Comme tout carré naturel, un carré magique d'ordre *n* est constitué de *n* lignes et de *n* colonnes et chaque case contient un nombre différent. Mais sa particularité est que la somme de tous les nombres en ligne, en colonne et selon les deux diagonales principales est toujours la même.

Ces carrés naturels d'un genre très particulier ont intéressé beaucoup d'esprits brillants, et depuis fort longtemps. Gravés sur des carapaces de tortue en Chine, voici près de trois mille ans, ils ont essaimé en Inde, puis en Europe au Moyen Âge, de plus en plus chargés de symboles et de plus en plus complexes. Les carrés magiques n'ont cessé d'influencer la tradition ésotérique. Dans le cadre de cette tradition, il faut bien entendu citer l'énigmatique gravure que le peintre et graveur Albrecht Dürer immortalisa en 1514. Cette gravure, intitulée « Melencolia », comporte un carré magique d'ordre 4 dont les propriétés sont tellement remarquables qu'on le qualifie d'*hypermagique*.

De grands mathématiciens comme Pierre de Fermat, Antoine Arnauld, Leonhard Euler, Karl Friedrich Gauss, Édouard Lucas, ou d'autres personnages célèbres comme Benjamin Franklin, n'ont pas manqué de s'intéresser aux carrés magiques qui atteignent aujourd'hui, grâce aux possibilités de calcul offertes par les ordinateurs, des tailles quasiment illimitées.

Ce livre remarquable commence par présenter dans une première partie le carré naturel et ses propriétés (sur les *maxima* et les *minima*, sur les différences constantes, etc.) Une analyse originale du Faust de Goethe y est ensuite développée, où l'on apprend que les incantations déclamées par la sorcière, loin d'être incohérentes et farfelues, répondent en fait à un carré magique très particulier. L'auteur insiste sur la polymagie, les carrés alternés et les carrés réversibles, puis il présente le fameux crible d'Ératosthène comme une application du carré naturel, avant d'entreprendre la présentation plus générale des matrices (une forme particulière des carrés naturels) et de leurs propriétés. L'auteur nous entraîne ensuite dans une « revisite » du carré naturel d'ordre 3. Enfin, tout naturellement, il en vient à présenter le Sudoku, un assemblage de carrés d'ordre 3. Il en profite pour exposer une intéressante méthode de résolution d'une grille de Sudoku qui ne demande qu'à être programmée sur ordinateur.

Puis l'auteur aborde dans une deuxième partie une liste impressionnante de jeux et de problèmes ressortissant au carré naturel. Il nous emmène ainsi dans toutes les variantes du jeu de Taquin, du jeu de Lewthwaite, de l'Amazone et de beaucoup d'autres jeux qui montrent l'extraordinaire fécondité du carré naturel. Mais ce n'est pas tout ! On trouve dans ce livre aux ressources inépuisables des développements sur les pentominos, les triminos et autres tétraminos, sur le jeu des circuits fermés, sur le Cogito, le Tablut, le jeu du Labyrinthe ou le jeu de la Vie, et aussi le Tak-Tiki, le jeu des Coins, le Triolet, le jeu des Paires, etc. Moins exotiques peut-être, on retrouve aussi la Marelle et le jeu de Dames, sans oublier ce jeu de stratégie que nous avons tous pratiqué dans notre enfance mais qui préfigure la très sérieuse *Théorie des Jeux* de John von Neumann et d'Oskar Morgenstern : la bataille navale.

Enfin, la troisième partie de ce livre est consacrée à la construction des carrés magiques avec l'aide du carré naturel. Nous devons à ce sujet remercier l'auteur de nous avoir déjà donné un manuel de référence en la matière, plus général. Ici, l'accent est porté sur les algorithmes, c'est-à-dire les procédés de calculs des carrés magiques, dans lesquels le carré naturel joue un rôle essentiel. Nul doute que des Fermat ou des Arnauld se seraient plongés avec délectation dans cette troisième partie, eux qui se sont astreints à construire des carrés magiques avec la seule puissance de leur calcul mental.

Le grand mérite de ce livre est de montrer qu'un carré naturel, au-delà de son extrême banalité, recèle des propriétés extraordinaires. Le lecteur y découvre pas à pas, et avec un luxe de détails inouï, ce qu'on peut effectivement appeler la *magie du carré*. Aussi faut-il savoir gré à René Descombes, l'un des meilleurs spécialistes français des carrés magiques, d'avoir entrepris ce travail magistral où toutes les sortes de carrés sont passées au crible. Nous sommes persuadés que ce livre novateur fera date. Nous lui souhaitons très sincèrement tout le succès qu'il mérite.

Jean-François PHELIZON

Avant-propos

Le carré naturel apparaît comme une formation ancrée dans la nuit des temps. Il représente le plus simple remplissage d'une grille de n^2 cases avec les n^2 premiers nombres entiers dans leur ordre naturel.

On pourrait penser que cette grille numérique élémentaire ne suscite rien de particulier, ne présente pas de propriétés remarquables, et ne joue aucun rôle en mathématiques ou dans ses applications.

On verra dans les pages qui suivent qu'il n'en est rien. Cette modeste étude d'ensemble, qui apparaît n'avoir pas été tentée jusqu'à ce jour sous cette forme, présente tout d'abord les propriétés relativement nombreuses et insoupçonnées du carré naturel à titre individuel. Ces propriétés participent de manières diverses à de nombreux jeux, problèmes et récréations mathématiques, ainsi qu'à la construction des carrés magiques, soit directement, soit à titre d'aide discrète mais efficace, aide comparable à celle d'un « catalyseur ». Cette participation essentielle dans la construction des carrés magiques confère au carré naturel un rôle particulièrement important.

Les propriétés générales du carré naturel font l'objet de la première partie de notre propos.

La seconde partie intéresse les jeux et problèmes auxquels participe le carré naturel. C'est la partie la plus importante, qui donne le titre de notre ouvrage.

La troisième partie est consacrée aux méthodes de construction des carrés magiques faisant appel au carré naturel.

Une soixantaine de jeux, problèmes, puzzles et divertissements mathématiques divers sont exposés, sans classement méthodique, mettant en lumière le caractère ludique du carré naturel, sous ses différentes facettes. Et une trentaine de méthodes de construction des carrés magiques sont présentées, intéressant spécifiquement les ordres impairs, les ordres pairs et quelques-unes les ordres impairs et pairs. Dans la plupart des cas, nous avons raisonné sur le carré naturel N, dont l'ordre n = 5 est représenté ci-dessous. Le raisonnement sur les autres formes du carré naturel est, *mutatis mutandis*, similaire.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Ce « catalogue », tant pour les jeux et problèmes du carré naturel que pour les méthodes de construction des carrés magiques, n'est sans doutes pas exhaustif, tant la littérature à ce sujet est abondante et diverse.

Je serais très reconnaissant aux lecteurs qui m'indiqueront d'autres jeux et problèmes, et d'autres méthodes de construction des carrés magiques, faisant appel au carré naturel, qui élargiront ainsi cette compilation, et qui me signaleront la participation éventuelle du carré naturel dans d'autres disciplines ou ap-plications scientifiques

Je remercie tous ceux qui ont été partie prenante dans cette aventure : les auteurs auxquels j'ai eu recours, pour leur participation involontaire mais décisive, Jean-Jacques DESCOMBES pour ses conseils en informatique et qui a assuré la mise en page de cet ouvrage, Jean-François PHELIZON, mon préfacier, trop aimable à mon égard, pour ses critiques constructives et son action déterminante dans cette édition, Hannes BÜRGEL pour ses illustrations et méthodes originales, les Éditions NUVIS, en la personne de Jean DE BELOT, son directeur général, et mon épouse pour sa patience et ses remarques incisives. Je remercie également pour leurs contributions originales Arsène DURUPT, Eric SIZARET et Michel COUTURIER.

I. Présentation et propriétés du carré naturel

1. Définitions

Le remplissage, à la ligne, d'une grille carrée d'ordre n, par les n^2 premiers entiers consécutifs, constitue ce que l'on appelle un « carré naturel », ou « carré fondamental ».

Ce carré naturel se présente essentiellement sous quatre formes :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

naturel (N)

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

miroir (M)

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

naturel inversé (NI)

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

miroir inversé (MI)

Sur le clavier de l'appareil téléphonique à touches, on trouve le carré naturel (N) d'ordre n = 3 dans le pavé numérique ; par contre, sur le pavé numérique des calculatrices, et sur celui des ordinateurs, on trouve le carré naturel inversé (NI).

On distingue en outre le « carré naturel alterné », ou « continu » :

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

naturel alterné (NI)

4	3	2	1
5	6	7	8
12	11	10	9
13	14	15	16

miroir alterné (MA)

16	15	14	13
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4

naturel inversé alterné (NIA)

13	14	15	16
12	11	10	9
5	6	7	8
4	3	2	1

miroir inversé alterné (MIA)

1.1. La notion de nombres et de cases complémentaires

Dans une série numérique, on nomme « nombres complémentaires », les couples de termes situés à égale distance des extrémités. *Exemple* :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

Les couples « 1 – 12 », « 2 – 11 », « 3 – 10 »…. sont des « nombres complémentaires ».

On peut écrire cette suite ainsi :

1, 2, 3, 4, 5, 6,
12, 11, 19, 9, 8, 7

Les nombres complémentaires se trouvent alors l'un au dessous de l'autre. C'est l'écriture dite « du pliage », conseillée par Sophie Neveu, dans le *Da Vinci Code* de Dan Brown (Edition J.C. Lattès, 2004, p.398) !

Dans toute suite en progression arithmétique, les couples complémentaires ont la même somme. C'est notamment le cas de la suite naturelle des entiers consécutifs, depuis 1 jusqu'à N ; cette somme est $\Sigma = N + 1$.

Dans le cas de la suite naturelle des entiers en nombre impair, le terme central est son propre complémentaire, et est égal à $\frac{1}{2}(N + 1)$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8

Dans une grille carrée d'ordre n, ou dans une grille rectangulaire, on nomme « cases complémentaires » les couples de cases symétriques par rapport au centre de la grille.
Le nombre N_n de couples numériques ou de cases complémentaires, est alors :

	●			
			○	
	○			
			●	

N ou n pair : $N_n = ½\ N = ½\ n^2$
N ou n impair : $N_n = ½\ (N – 1) = ½\ (n^2 – 1)$

Lorsque le nombre de termes de la série est le produit « m × n » de deux nombres entiers, on peut placer ces termes dans une grille de côtés m et n. Exemple avec m × n = 3 × 6 = 18 :

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

1	4	7	10	13	16
2	5	8	11	14	17
3	6	9	12	15	18

1.2. Une application des nombres complémentaires : le Code Atbash

« Cette méthode de chiffrement, qui date de près de 500 ans avant Jésus Christ, utilise les lettres de l'alphabet hébraïque dans un système de substitution où chaque lettre est replacée par celle qui se trouve à égale distance en partant du côté opposé de l'alphabet. En d'autre termes, la 1ère lettre est remplacée par la dernière, la deuxième par la pénultième, et ainsi de suite » (d'après Simon Cox, *Le Code Da Vinci décrypté*, Le Pré aux Clercs Éditeur, 2004, p. 52)

Cela revient à dire que dans la série constituée par les termes d'un alphabet, chaque terme est remplacé par son complémentaire. Exemple avec les caractères latins, présentation par la « méthode du pliage » :

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m
z, y, x, w, v, u, t, s, r, q, p, o, n

Dans un alphabet composé d'un nombre impair de lettres, le terme central serait invariant. Pour « tromper l'ennemi », on peut évidemment écrire l'alphabet dans un ordre différent de l'ordre habituel.

1.3. Propriétés générales des carrés naturels.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

carré naturel, n = 5 M_5=65

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	10
11	24	7	20	3

carré magique associé

Les couples de nombres complémentaires sont situés dans les cases complémentaires de la grille. C'est également le cas, rappelons-le, du carré magique normal de type associé.

Les couples de nombres complémentaires ont la même somme, $\sum = n^2 + 1$

Dans les carrés naturels d'ordre impair, la case centrale a pour valeur : $c = ½ (n^2+1)$

Dans toute ligne, colonne, ainsi que dans les diagonales principales et brisées, les termes à égales distance des extrémités, c'est-à-dire les termes complémentaires de ces petites suites, ont la même somme.

Cette propriété, inhérente à toute progression arithmétique, a été indiquée précédemment. On observe en effet dans tout carré naturel :

- les lignes horizontales sont en progression arithmétique de raison r = 1, par définition ;
- les colonnes verticales sont en progression arithmétique de raison r = n :
- les diagonales principales et brisées sont en progression arithmétique de raison r = n –1 et r = r + 1.

		1	2	3
4	5	6	7	8
9	10	11	12	13
14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25			

Les sommes des deux termes situés aux extrémités des diagonales principales de tout carré ou rectangle naturel, sont égales. Cette propriété s'applique également aux médianes des carrés naturels d'ordre impair.

On observe ces propriétés dans le « carré naturel Décalé », dans toute formation carrée ou rectangulaire. C'est le cas par exemple du calendrier mensuel classique, dans lequel chaque ligne représente une semaine de 7 jours, quelle que soit la case départ du 1er du mois.

Les « constantes » sont évidemment différentes pour chaque configuration.

Certaines propriétés du carré naturel formateur d'ordre n, sont conservées dans le tapis de carrés naturels, dans toute formation carrée d'ordre n, par exemple la magie des diagonales principales, comme ci-dessous :

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16

On peut également envisager d'autres formations carrées d'un ordre différent de n, ou bien des formations rectangulaires. Certaines propriétés indiquées ci-dessus, peuvent être observées.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16

Dans un tapis ou un pavage en bande du carré naturel d'ordre pair ou impair, les diagonales de n termes son magiques. Exemple pour n = 4 : la constante linéaire $M_4 = 34$ est observée sur toutes les diagonales de 4 termes.

Cette propriété est utilisée dans certaines méthodes de construction des carrés magiques.

1.4. Le carré naturel alterné.

Les propriétés du carré naturel ne sont pas transposables au carré naturel alterné. On remarque cependant certaines égalités de sommes dans certains couples de nombres complémentaires. Exemples :

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

Pour le carré naturel alterné NA, d'ordre n = 4 :

1,	2,	3,	4,	8,	7,	6,	5
13,	14,	15,	16,	12,	11,	10,	9
14,	16,	18,	20,	20,	18,	16,	14

Pour le carré naturel alterné NA d'ordre n = 6 :

1, 2, 3, 4, 5, 6	12,11,10, 9, 8, 7	13,14,15,16,17,18
31,32,33,34,35,36	30,29,28,27,26,25	19,20,21,22,23,24
32,34,36,38,40,42	42,40,38,36,34,32	32,34,36,38,40,42

1.5. La magie simple du carré naturel

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

$M_3 = 15$

1	2	**3**	4	**5**
6	**7**	**8**	**9**	10
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**

$M_5 = 65$

1	2	3	**4**
5	**6**	**7**	8
9	**10**	**11**	12
13	14	15	**16**

$M_4 = 34$

1	2	3	4	5	**6**
7	**8**	9	10	**11**	12
13	14	**15**	**16**	17	18
19	20	**21**	**22**	23	24
25	**26**	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	**36**

$M_6 = 111$

Dans les carrés naturels d'ordre impair, les diagonales principales et brisées, ainsi que les lignes et colonnes médianes, ont toutes pour somme la constante linéaire du carré magique de même ordre.

Dans les carrés naturels d'ordre pair, seules les diagonales principales et brisées, ont pour somme la constante linéaire du carré magique de même ordre.

Ainsi dans certaines méthodes de construction des carrés magiques à partir d'un carré naturel, les termes situés sur ces alignements sont-ils à leur place définitive.

2. La polymagie du carré naturel.

La magie ou magie simple du carré magique et du carré naturel s'applique à un nombre limité d'alignements.

On a pu observer cependant que l'addition de n termes de la grille d'un carré magique ou d'un carré naturel, dans un ordre dispersé, est également magique.

On se propose alors, dans une grille numérique carrée d'ordre n, remplie avec les n^2 premiers entiers consécutifs de façon aléatoire, de rechercher toutes les combinaisons de ces n^2 entiers pris n à n dans cette grille, et de considérer la somme Σ des n termes de chaque combinaison numérique, et en particulier les sommes Σ qui sont magiques. C'est ce dernier cas que nous avons baptisé « polymagie ».

La polymagie du carré naturel passe ainsi par une étude plus générale.

2.1 Cas de n = 3

Le nombre de combinaisons de 9 termes pris 3 à 3 est $C_9^3 = 84$. Il est facile de dresser la liste de ces 84 combinaisons (Voir ci-dessous).

6	2	8
5	1	4
9	3	7

Tableau I - Les 84 combinaisons des 9 premiers entiers pris 3 à 3.
Classement des sommes Σ par ordre croissant.

1+2+3= 6	1+3+8=12	2+4+8=14	3+5+8=16	2+8+9=19
1+2+4= 7	1+4+7=12	2+5+7=14	3+6+7=16	3+7+9=19
1+2+5= 8	1+5+6=12	3+4+7=14	4+5+7=16	4+6+9=19
1+3+4= 8	2+3+7=12	3+5+6=14	1+7+9=17	5+7+8=19
1+2+6= 9	2+4+6=12	1+5+9=15	2+6+9=17	5+6+8=19
1+3+5= 9	3+4+5=12	1+6+8=15	2+7+8=17	3+9+9=20
2+3+4= 9	1+3+9=13	2+4+9=15	3+5+9=17	4+7+9=20
1+2+7=10	1+4+8=13	2+5+8=15	3+6+8=17	5+6+9=20
1+3+6=10	2+3+8=13	2+6+7=15	4+5+8=17	5+7+8=20
1+4+5=19	2+4+7=13	3+4+8=15	4+6+7=17	4+8+9=21
2+3+5=10	2+5+6=13	3+5+7=15	1+8+9=18	5+7+9=21
1+2+8=11	3+4+6=13	4+5+6=15	2+7+9=18	6+7+8=21
1+3+7=11	1+5+7=13	1+6+9=16	3+6+9=18	5+8+9=22
1+4+6=11	1+4+9=14	1+7+8=16	3+7+8=18	6+7+9=22
2+3+6=11	1+5+8=14	2+5+9=16	4+5+9=18	6+8+9=23
2+4+5=11	1+6+7=14	2+6+8=16	4+6+8=18	7+8+9=24
1+2+9=12	2+3+9=14	3+4+9=16	5+6+7=18	

Le *Tableau II* ci-dessous donne le nombre N des combinaisons ayant des sommes Σ égales :

Σ	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**
N	1	1	2	3	4	5	7	7	8	**8**

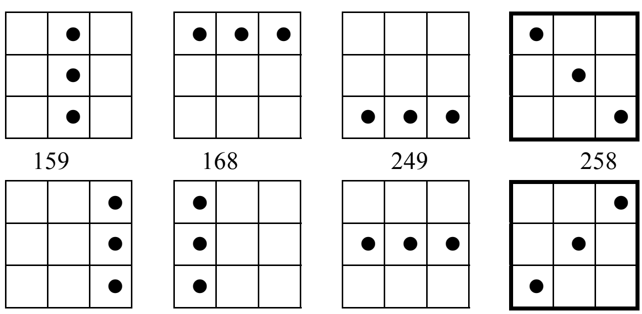
Σ	16	17	18	19	20	21	22	23	24
N	8	7	7	5	4	3	2	1	1

On constate dans le cas considéré, que les 8 conditions de magie du Lo Shu, de constante magique $M_3 = 15$, sont représentées parmi les 84 combinaisons en cause, comme il fallait s'y attendre, mais que ce sont les seules combinaisons ayant pour somme cette constante magique, qui, dans la série « Σ », est égale à la ½ somme des termes équidistants des extrêmes, ou « termes complémentaires » de la série en cause.

159 168 249 258 267 348 357 456

8	1	6
3	5	7
4	9	2

On peut visualiser ces 8 combinaisons comme suit, parmi lesquelles on compte deux permutations figurées **(cadres renforcés)** :



Ce sont les seules combinaisons que l'on peut placer sur les 8 alignements magiques de la grille d'ordre n = 3, de 8 façons différentes, c'est-à-dire les 8 formes du Lo Shu :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Il y a bien aussi deux séries de 8 combinaisons dont le total des termes est le même, soit Σ = 14 et Σ = 16, mais il s'avère impossible de les placer dans une grille d'ordre n = 3, de telle façon que les sommes linéaires des lignes, des colonnes et des diagonales principales soient les mêmes.

2.2. Cas de n = 4

Le nombre de combinaisons de 16 termes pris 4 à 4 est $C_{16}^{4} = 1820$.

En prenant exemple sur le cas de n = 3, on se propose de dénombrer les combinaisons dont la somme des 4 termes est égale à la constante linéaire du carré magique normal d'ordre n = 4, soit $M_4 = 34$.

Dans ce cas simple, on peut dresser directement la liste de ces combinaisons, sans établir la liste complète des 1820 combinaisons de 16 termes pris 4 à 4 :

Tableau III

1 – 1, 2, 15, 16 *	30 – 2, 7, 9, 16	59 – 4, 5, 11, 14
2 – 1, 3, 14, 16 *	31 – 2, 7, 10, 15 *	60 – 4, 5, 12, 13 *
3 – 1, 4, 13, 16 *	32 – 2, 7, 11, 14•	61 – 4, 6, 8, 16
4 – 1, 4, 14, 15•	33 – 2, 7, 12, 13	62 – 4, 6, 9, 15
5 – 1, 5, 12, 16 *	34 – 2, 8, 9, 15 *	63 – 4, 6, 10, 14
6 – 1, 5, 13, 15	35 – 2, 8, 10, 14	64 – 4, 6, 11, 13•*
7 – 1, 6, 11, 16	36 – 2, 8, 11, 13	65 – 4, 7, 8, 15
8 – 1, 6, 12, 15	37 – 2, 9, 10, 13	66 – 4, 7, 9, 14
9 – 1, 6, 13, 14	38 – 2, 9, 11, 12	67 – 4, 7, 10, 13 *
10 – 1, 7, 10, 16•*	39 – 3, 4, 11, 16	68 – 4, 7, 11, 12
11 – 1, 7, 11, 15	40 – 3, 4, 12, 15	69 – 4, 8, 9, 13 *
12 – 1, 7, 12, 14	41 – 3, 4, 13, 14 *	70 – 4, 8, 10, 12
13 – 1, 8, 9, 16 *	42 – 3, 5, 10, 16	71 – 4, 9, 10, 11
14 – 1, 8, 10, 15	43 – 3, 5, 11, 15	72 – 5, 6, 7, 16
15 – 1, 8, 11, 14	44 – 3, 5, 12, 14 *	73 – 5, 6, 8, 15
16 – 1, 8, 12, 13э	45 – 3, 6, 9, 16	74 – 5, 6, 9, 14
17 – 1, 9, 10, 14	46 – 3, 6, 10, 15•	75 – 5, 6, 10, 13
18 – 1, 9, 11, 13	47 – 3, 6, 11, 14 *	76 – 5, 6, 11, 12 *
19 – 1,10,11, 12	48 - 3, 6, 12, 13	77 – 5, 7, 8, 14
20 – 2, 3, 13, 16•	49 – 3, 7, 8, 16	78 – 5, 7, 9, 13
21 – 2, 3, 14, 15 *	50 – 3, 7, 9, 15	79 – 5, 7, 10, 12 *
22 – 2, 4, 12, 16	51 – 3, 7, 10, 14 *	80 – 5, 8, 9, 12 *
23 – 2, 4, 13, 15 *	52 – 3, 7, 11, 13	81 – 5, 8, 10, 11•
24 – 2, 5, 11, 16	53 – 3, 8, 9, 14 *	82 – 6, 7, 8, 13
25 – 2, 5, 12, 15 *	54 – 3, 8, 10, 13	83 – 6, 7, 9, 12•
26 – 2, 5, 13, 14	55 – 3, 8, 11, 12	84 – 6, 7, 10, 11 *
27 – 2, 6, 10, 16	56 – 3, 9, 10, 12	85 – 6, 8, 9, 11 *
28 – 2, 6, 11, 15 *	57 – 4, 5, 9, 16•	86 – 7, 8, 9, 10 *
29 – 2, 6, 12, 14	58 – 4, 5, 10, 15	

Nota : les 28 combinaisons formées de deux couples de nombres complémentaires, dites «combinaisons complémentaires», sont marquées d'un astérisque [*].

On dénombre ainsi 86 combinaisons de 4 termes dont la somme est égale à $M_4 = 34$. On constate donc, qu'en plus des 10 conditions de magie du carré magique normal d'ordre n = 4, il y a un bien plus grand nombre de sommes magiques possibles dans un tel carré magique normal ; d'où la notion de « polymagie ».

Prenons l'exemple du « carré de Dürer » qui est bien connu.

Les combinaisons correspondant aux 10 conditions de magie dans ce cas particulier, sont pointées au Tableau III. [•] Les 86 combinaisons, dans l'exemple du carré de Dürer, sont visualisées dans les cases pointées de la Planche IV, dans les pages qui suivent.

	16	3	2	13	34
	5	10	11	8	34
	9	6	7	12	34
	4	15	14	1	34
34	34	34	34	34	34

Les différentes grilles élémentaires sont placées dans le même ordre que celui des combinaisons numériques du Tableau III.

Parmi les 86 figures de cet exemple, on dénombre 8 permutations figurées (**cadres renforcés** dans la Planche IV ci-après p.56).

Chaque carré magique d'ordre n = 4 possède ainsi sa propre visualisation spécifique des 86 combinaisons de même somme $\Sigma = M_4 = 34$.

Un autre exemple de visualisation sur le « carré de Moesner » (2) ci-contre est donné dans la Planche IV B dans les pages qui suivent.

On remarque, entre autres, que les 8 permutations figurées magiques sont implantées aux mêmes emplacements que dans la planche IV.

	12	13	1	8	34
	6	3	15	10	34
	7	2	14	11	34
	9	16	4	5	34
34	34	34	34	34	34

Est-ce un hasard ? Un certain nombre de figures, dont les 8 permutations figurées, sont communes aux deux planches, IV et IVB.

2.3. Généralisation pour n > 4.

D'une façon générale, il s'agit d'établir la liste des N_{Mn} combinaisons des n^2 premiers nombres entiers pris n à n, telles que la somme Σ de ces n entiers soit égale à la constante linéaire M_n du carré magique normal d'ordre n, soit

$$M_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Pour n >4, il faut avoir recours à un programme informatique ad hoc. On est surpris de constater l'importance et la croissance très rapide en fonction de n, du nombre N_{Mn} de combinaisons ayant même somme $\Sigma = M_n$:

N	3	4	5	6
$C^{n}_{n^2}$	84	1820	53 130	1 947 792
$\Sigma = M_n$	15	34	65	111
Conditions de la magie normale (2n + 2)	8	10	12	14
N_{Mn}	8	86	1 394	32 134

Ainsi, on peut dire que dans tout carré magique normal d'ordre n > 3, la constante linéaire est obtenue un nombre de fois bien supérieur aux conditions habituelles (2n + 2) de magie normale, ce qui lui confère un caractère nettement polymagique.

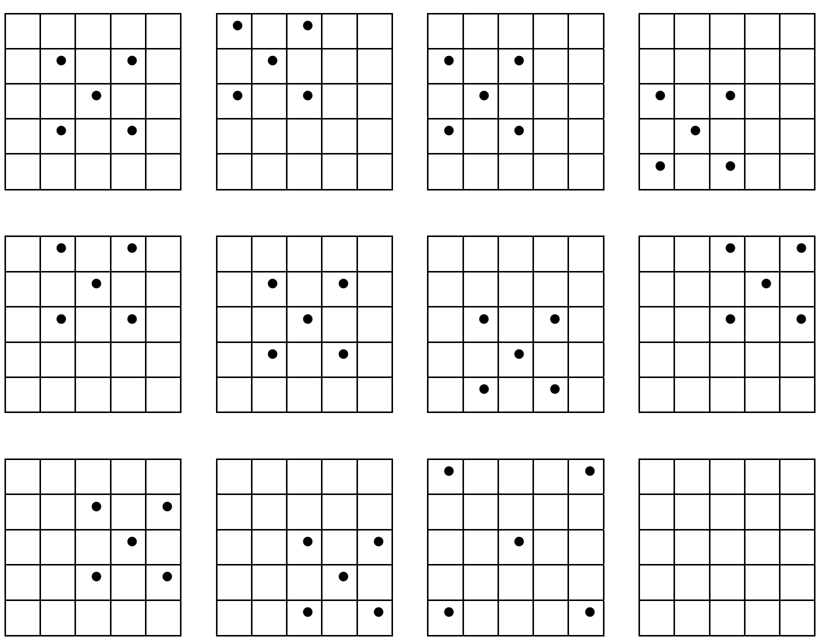
On peut alors considérer le carré magique normal, comme un cas particulier de cette polymagie.

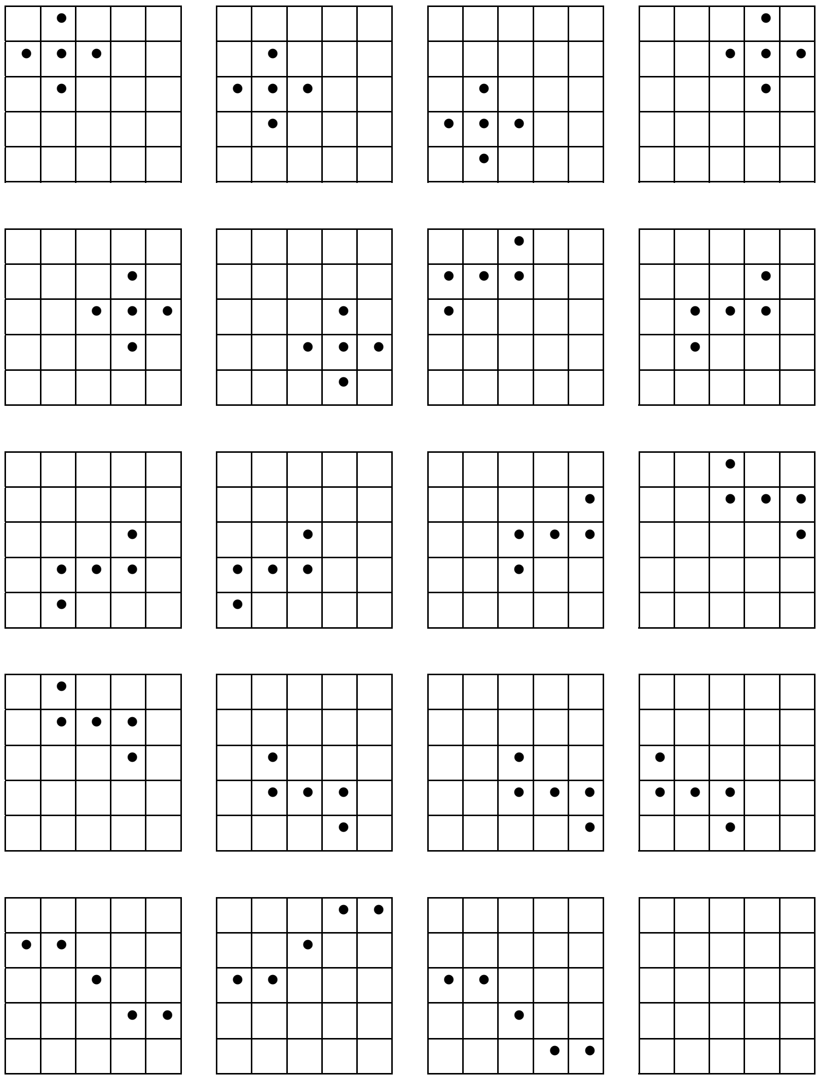
Remarque. On ne confondra pas la « Polymagie » avec la « Multimagie », cette dernière caractérisant un carré magique qui reste magique lorsque l'on élève à une même puissance chacun de ses termes : puissance 2, c'est la bimagie ; 2 et 3 , la trimagie ; 2, 3 et 4, la tétramagie ; 2, 3, 4 et 5, la pentamagie…(cf. Christian Boyer, *Les premiers carrés tétra et pentamagiques*, « Pour la Science », n°286, Août 2001, pp. 98-102 ; et le site de Christian Boyer : www.multimagie.com/)

2.4. La polymagie du carré magique d'ordre n = 5

Voici une visualisation de quelques combinaisons de 5 nombres dans un carré magique d'ordre n = 5, dont la somme est égale à la constante magique $M_5 = 65$: ces figures caractéristiques ont été établies par Arsène Durupt :

22	15	3	16	9
18	6	24	12	5
14	2	20	8	21
10	23	11	4	17
1	19	7	25	13





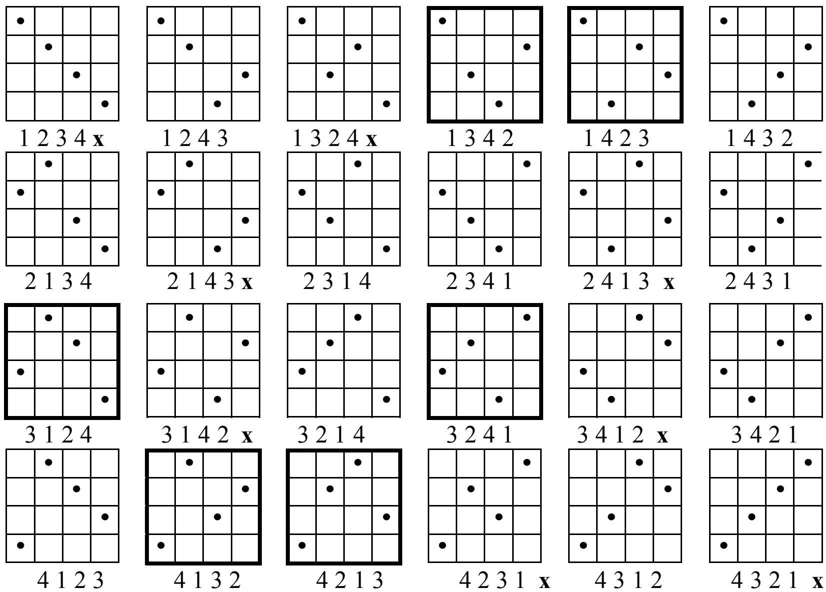
2.5. Les permutations figurées magiques.

Ce qui précède nous amène à préciser le rôle des permutations figurées dans les carrés magiques, ainsi que dans le carré naturel.

2.5.1. Rappel de quelques définitions.

On a l'habitude de représenter de façon « figurée » ou « géométrique », une permutation de n éléments, dans une grille carrée de côté n : on numérote de 1 à n les cases de chaque colonne, généralement de haut en bas, chaque case pointée correspondant à un élément de la « permutation figurée » en cause.

Voici par exemple, dans ces conditions, les 24 permutations figurées de 4 éléments :



Dans une permutation figurée, aucun élément n'est aligné avec un autre dans les lignes et les colonnes.

Un type particulier de permutation figurée est la permutation figurée diagonale, qui ne comporte qu'une case pointée et une seule sur chaque diagonale principale. Dans une permutation figurées diagonale, il n'y a jamais de cases pointées alignées sur les lignes, les colonnes et les diagonales principales. On compte 8 permutations figurées diagonales parmi les 24 permutations figurées de 4 éléments (**cadres renforcés** de la figure ci-dessus)

On distingue également les permutations figurées pandiagonales, qui ne comportent qu'une case pointées et une seule, sur toutes les diagonales, principales et brisées.

On observe aussi un certain nombre de « combinaisons complémentaires », formées de deux couples de nombres (ou de cases) complémentaires. Il y en a 8 également, marquées [**x**]

Rappelons qu'il y a évidemment autant de permutations figurées que de permutations numériques correspondantes, soit P = n !

2.5.2. Les permutations figurées dans les carrés magiques : les permutations figurées diagonales.

On peut ajouter ou retrancher un même nombre «w » aux termes d'un carré magique placés sur une permutation figurée diagonale sans altérer la magie du carré numérique en cause. *Exemples* **:**

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

M_4=34 ; w=10

1	25	14	4
12	6	17	9
18	10	11	5
13	3	2	26

M'_4=34+10=44

15	23	6	19	2
9	17	5	13	21
3	11	24	7	20
22	10	18	1	14
16	4	12	25	8

$M_5 = 65$; $w = 5$

15	28	6	19	2
9	17	5	13	26
3	11	29	7	20
27	10	18	1	14
16	4	12	30	8

$M'_5 = 65 + 5 = 70$

2.5.3. Les permutations figurées diagonales minima et maxima

Considérons les quatre alignements des lignes du carré naturel d'ordre N = 4 :

1, 2, 3, 4 - 5 , 6 , 7 , 8 - 9, 10, 11, 12 et 13 , 14, 15, 16. Lorsque la première séquence «1, 2, 3, 4 » est située sur une permutation figurée diagonale, on dit qu'il s'agit d'une *permutation figurée diagonale minima.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Lorsque la dernière séquence « 13, 14, 15, 16 » est située sur une permutation figurée diagonale, on dit qu'il s'agit d'une *permutation figurée diagonale maxima.* Exemples :

1	6	15	12
16	11	2	5
10	13	8	3
7	4	9	14

« minima »

1	6	16	11
12	15	5	2
7	4	10	13
14	9	3	8

« minima »

5	15	10	4
12	6	3	13
1	11	14	8
16	2	7	9

« maxima »

16	7	2	9
12	3	6	13
1	14	11	8
5	10	15	4

« maxima »

Ces configurations sont précieuses dans la construction des carrés magiques dont la constante linéaire est choisie « a priori » (Voir René Descombes, *La Magie du Carré*, Vuibert, 2004, pp. 544-547)

En effet, lorsque l'on ajoute un même nombre « w » aux termes situés sur une permutation figurée diagonale maxima, non seulement on n'altère pas la magie du carré magique, mais en outre on est sûr de ne pas générer de doublets dans le carré magique résultant. C'est le cas du carré magique d'ordre n = 5 pris pour exemple ci-dessus :

$$M'_5 = M_5 + w \text{ ; soit } 70 = 65 + 5$$

On observe une propriété analogue, si l'on admet des termes négatifs, intéressant la permutation figurée diagonale minima, lorsque l'on retranche le même nombre « w » aux termes situés sur cette permutation.

L'examen de ces permutations sur le carré magique d'ordre n = 4, nous amène à faire les remarques suivantes :

- les chiffres de la séquence minima (1, 2, 3, 4) sont toujours sur une permutation figurée ;
- lorsque la séquence minima forme une permutation figurée diagonale minimum, on trouve dans la même grille la permutation figurée diagonale maximum (13, 14, 15, 16) correspondante ;

- comme corollaire, on peut dire que les permutations figurées diagonales minima et maxima, quand elles existent, sont toujours dans la même grille ;
- enfin, sur les grilles où se trouvent simultanément les deux permutations figurées minimum et maximum, les deux séquences « moyennes » intermédiaires « 5, 6, 7, 8 » et « 9, 10, 11, 12 » se trouvent également sur une permutation figurée diagonale. Les quatre séquences remplissent ainsi toute la grille. Exemples :

1	5	12	16
15	11	6	2
15	4	13	7
8	14	3	9

1	5	16	12
10	14	3	7
15	11	6	2
8	4	9	13

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

1	6	12	15
8	15	2	9
12	3	14	5
13	10	7	4

1	6	12	15
11	16	2	5
8	3	13	10
14	9	7	4

On trouve de nombreux exemples dans la Classification dite de Frénicle, des 880 carrés magiques de base d'ordre n = 4.

Dans les pages qui précèdent nous avons vu que dans tout carré magique normal, et parmi toutes les combinaisons des n^2 premiers entiers pris n à n dont la somme des n termes est égale à la constate linéaire M_n du carré magique d'ordre n considéré, il existe un certain nombre de permutations figurées qui sont « magiques ».

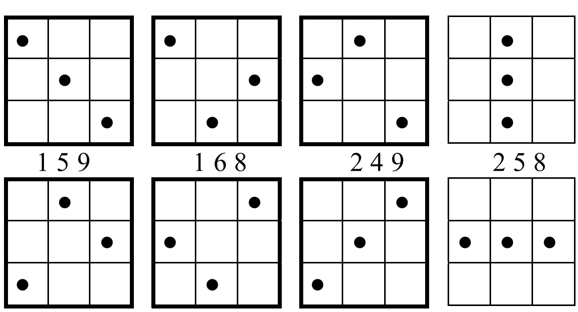
Parmi tous les carrés numériques qui peuvent être envisagés dans le cadre de la polymagie, nous allons considérer le cas du carré naturel .

2.6. Le carré naturel d'ordre n = 3

Appliquons la visualisation des 8 combinaisons des 9 premiers entiers pris 3 à 3 dont la somme $\Sigma = M_n = 15$, au carré naturel d'ordre n = 3 :

1 5 9 1 6 8 2 4 9 2 5 8 2 6 7 3 4 8 3 5 7 4 5 6

1	2	3
4	5	6
7	8	9



1 5 9 1 6 8 2 4 9 2 5 8

2 6 7 3 4 8 3 5 7 4 5 6

On retrouve la magie du carré naturel d'ordre impair sur les médianes et les deux diagonales principales. Parmi ces 8 figures, on dénombre les six permutations figurées d'ordre n = 3, qui sont donc magiques (**cadres renforcés**)

2.7. Le carré naturel d'ordre n = 4

Appliquons au carré naturel d'ordre n = 4 la visualisation des 86 combinaisons des 16 premiers entiers pris 4 à 4, dont la somme Σ des 4 termes est égale à $M_4 = 34$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On retrouve dans la Planche V une partie des figures de la Planche IV (dont la magie des seules diagonales principales, cas des carrés d'ordre pair), et on trouve certaines figures nouvelles.

Parmi ces 86 combinaisons, on dénombre 24 permutations figurées différentes (**cadres renforcés**), c'est-à-dire toutes les permutations figurées d'ordre n = 4 (4 ! = 24), qui sont donc magiques.

Et l'on compte 28 « combinaisons complémentaires » [x]

Il s'avère, après vérifications, qu'il en est ainsi, *mutatis mutandis*, pour tous les ordres des carrés naturels.

S'il n'est pas très facile de dénombrer les combinaisons des n^2 premiers entiers pris n à n, et dont la somme des termes est égale à la constante linéaire du carré magique d'ordre n, on dénombre aisément les permutations figurées du carré naturel. Ainsi par exemple la Planche VI donne les 120 permutations figurées magique du carré naturel d'ordre n =5.

n	3	4	5	6	7	8
n ! = permutations figurées magiques du carré naturel	6	24	120	720	5040	40 320

D'où l'énoncé de cette intéressante propriété du carré naturel :

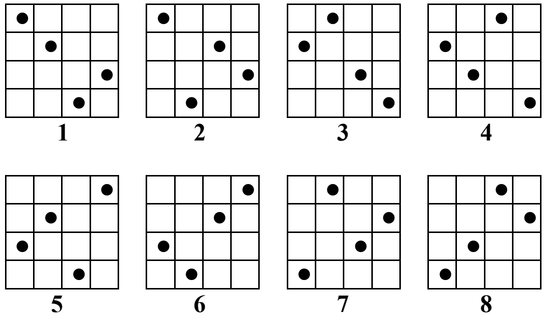
Dans tout carré naturel, toutes les permutations figurées sont magiques, la constante linéaire étant celle du carré magique normal de même ordre.

2.8. Cas du carré naturel alterné.

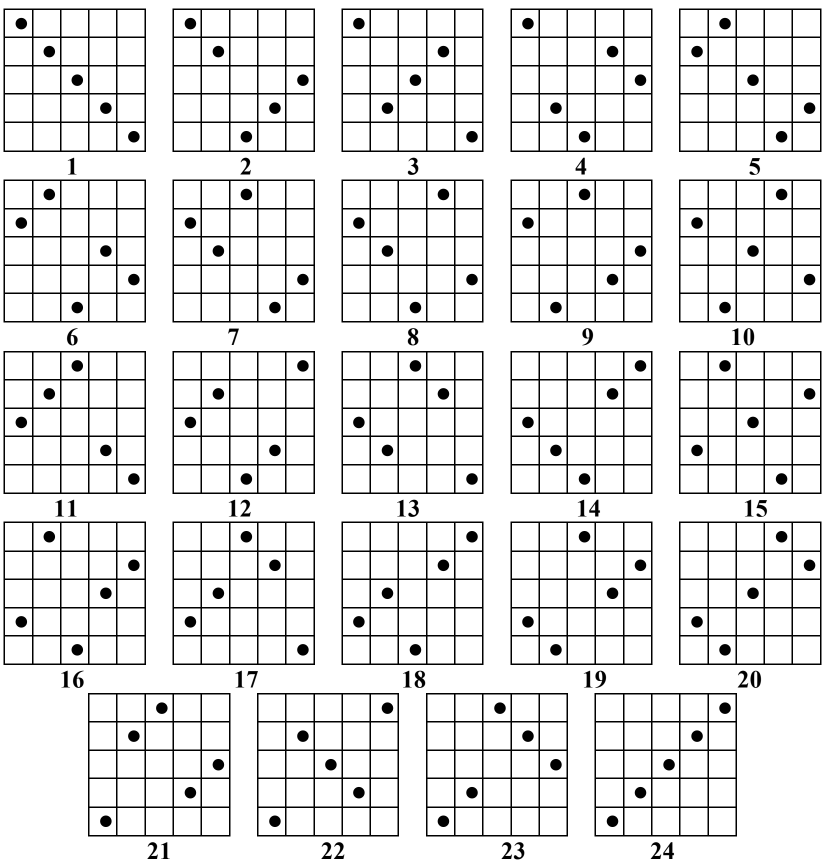
1	**2**	**3**	**4**
8	**7**	**6**	**5**
9	**10**	**11**	**12**
16	**15**	**14**	**13**

1	**2**	**3**	**4**	**5**
10	**9**	**8**	**7**	**6**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
20	**19**	**18**	**17**	**16**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

La propriété énoncée ci-dessus pour le carré naturel, n'est pas transposable au carré naturel alterné. Les sommes Σ données par la visualisation des permutations figurées sur le carré naturel alterné ne sont pas toutes magiques. Pour n = 4, on ne trouve que 8 permutations figurées magiques (Σ = 34) sur 24 ; et pour n = 5, on en trouve 24 (Σ = 65) sur 120. Voici les 8 permutations figurées magiques sur le carré naturel alterné d'ordre n = 4 :



Et les 24 permutations figurées magiques sur le carré naturel alterné d'ordre n = 5 :



En résumé :

. Dans tout carré numérique d'ordre n des n^2 premiers entiers, les nombreuses « combinaisons magiques » de n termes, caractérisent la « polymagie » de ces figures.

. Le carré magique normal peut être considéré comme un cas particulier de la polymagie.

. Les permutations figurées jouent un rôle tout à fait particulier dans les carrés magiques normaux, et sont omniprésentes dans les carrés naturels.

2.9. La polymagie du rectangle magique

7	5	4	10	14	40
15	13	8	3	1	40
2	6	12	11	9	40
24	24	24	24	24	

12	11	10	15	14	13	75
18	17	16	9	8	7	75
19	20	21	4	5	6	75
1	2	3	22	23	24	75
50	50	50	50	50	50	

Dans la magie du rectangle magique, on distingue la magie des colonnes ou magie verticale, et la magie des lignes ou magie horizontale. Il y a donc deux constantes magiques.

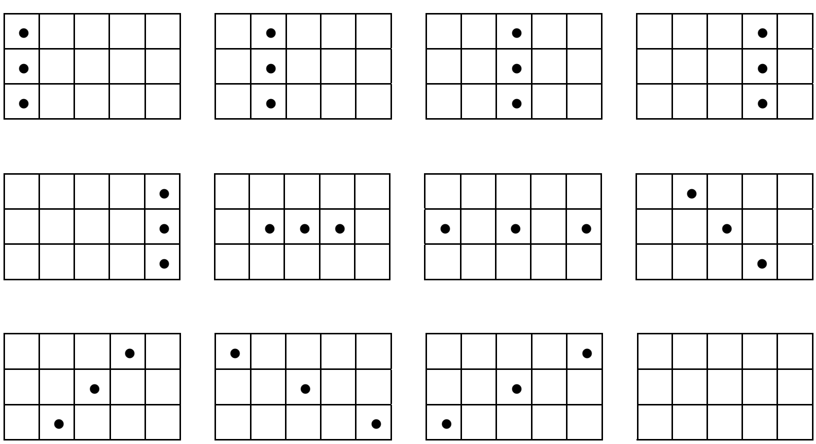
Les côtés du rectangle magique sont de même parité ; il n'y a pas de rectangle magique mixte (cf. René Descombes, *Les Carrés magiques*, Vuibert, 2000, pp. 371-373)

Nous prendrons pour exemple dans ce qui suit, le rectangle magique normal de type associé, de 5 x 3 = 15 cases représenté ci-dessus (page précédente)

2.9.1. La polymagie des colonnes, ou polymagie verticale.

On peut visualiser ainsi qu'il suit la magie simple des colonnes, de constante magique

$M'_3 = 24$: on a au moins 11 alignements de 3 termes totalisant 24.



En matière de polymagie, il s'agit donc de tester les combinaisons de 15 termes pris 3 à 3, dont la somme est égale à la constante magique verticale $M'_3 = 24$.

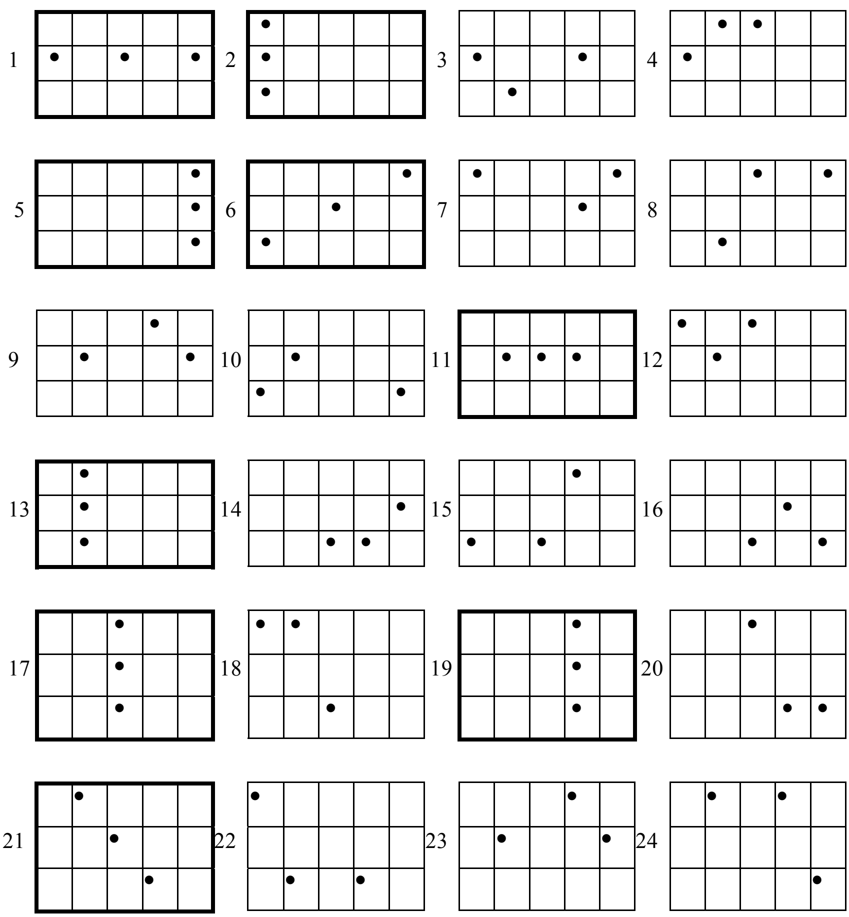
On compte 455 combinaisons de 15 termes pris 3 à 3 : $C_{15}^{3} = 455$. On remarque que l'on peut déjà éliminer les 84 combinaisons des 9 premiers entiers pris 3 à 3 (cf. Tableau I dans les pages qui précèdent). Il reste quand même 371 combinaisons à tester, parmi lesquelles d'assez nombreuses combinaisons dont la somme est égale à 24.

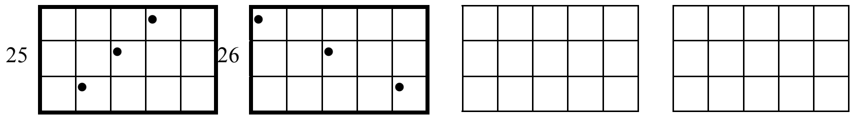
Un programme informatique serait le bienvenu pour effectuer ce tri.

On peut cependant écrire directement ces combinaisons magiques. On en trouve 26.

1. 1 + 8 + 15
2. 2 + 7 + 15
3. 3 + 6 + 15
4. 4 + 5 + 15
5. 1 + 9 + 14
6. 2 + 8 + 14
7. 3 + 7 + 14
8. 4 + 6 + 14
9. 1 + 10 + 13
10. 2 + 9 + 13
11. 3 + 8 + 13
12. 4 + 7 + 13
13. 5 + 6 + 13
14. 1 + 11 + 12
15. 2 + 10 + 12
16. 3 + 9 + 12
17. 4 + 8 + 12
18. 5 + 7 + 12
19. 3 + 10 + 11
20. 4 + 9 + 11
21. 5 + 8 + 11
22. 6 + 7 + 11
23. 1 + 13 + 10
24. 5 + 9 + 10
25. 6 + 8 + 10
26. 7 + 8 + 9

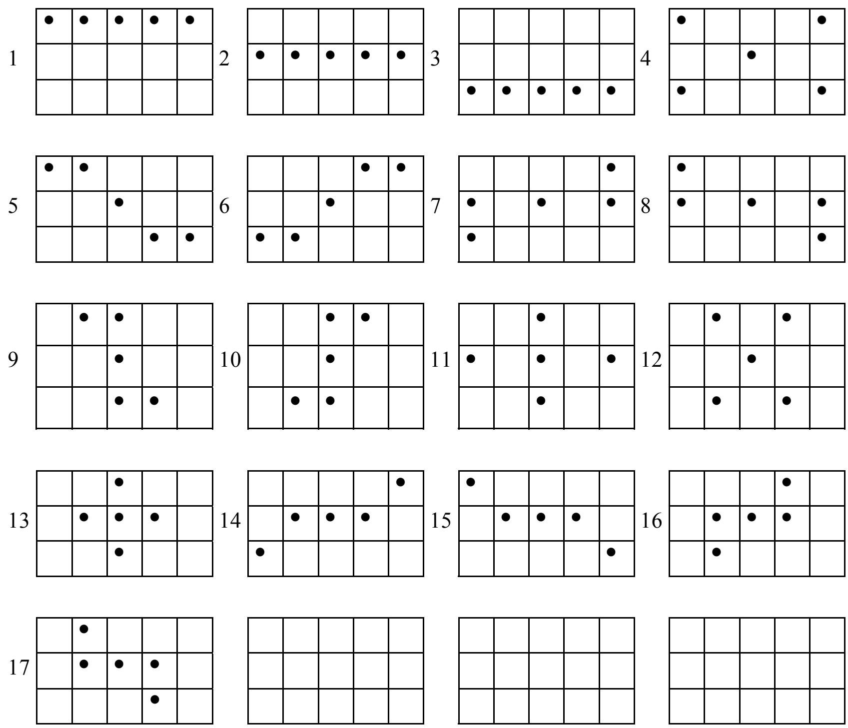
On peut alors facilement visualiser ces formations, où l'on retrouve naturellement les alignements de la magie verticale simple.





2.9.2. La polymagie des lignes ou polymagie horizontale

Pour la magie simple des lignes, on trouve 17 combinaisons, présentant une certaine « symétrie centrale», de 5 termes totalisant la constante horizontale $M'_5 = 40$.



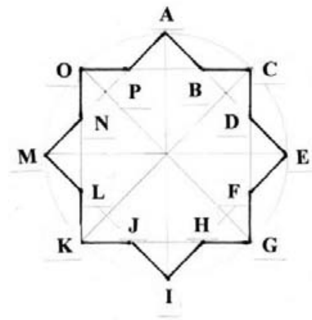
Le nombre total de combinaisons de 15 termes pris 5 à 5 est $C_{15}^{5} = 3003$.

L'écriture directe des combinaisons « magiques », totalisant la constante horizontale de $M'_5 = 40$, paraît quelque peu présomptueuse, et le recours à un programme informatique semble incontournable.

Nous en resterons là pour l'étude de la polymagie du rectangle magique.

2.10. La polymagie de l'octogramme magique.

Rappelons que dans l'octogramme magique, les 8 alignements de 4 sommets totalisent la constante linéaire de 34, constante magique du carré magique d'ordre n = 4. Voici l'une des solutions :



A	B	C	D	E	F	G	H
2	5	3	14	13	1	16	8
I	J	K	L	M	N	O	P
12	6	4	9	7	10	11	15

La polymagie de l'octogramme magique est évidemment la même que celle du carré magique d'ordre n = 4 : 86 combinaisons « magiques » de la série «1 – 16».

La visualisation est bien sûr possible, et prend beaucoup de place !

2.11. La longue gestation d'un carré magique très particulier.

La revue « The American Mathematical Monthly » (n°48, Décembre 1941), posait la question suivante, sous la signature de Royal Vale Heath : « Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle les n^2 nombres triangulaires consécutifs

$$0 ; 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; \ldots ; \tfrac{1}{2} n^2 (n^2 - 1),$$

peuvent être distribués pour former un carré magique ? » Ce problème était resté non résolu ; on n'avait pas trouvé de solution pour n < 8.

66 ans plus tard, c'est-à-dire en l'an 2007, Christian Boyer apporte une solution pour n = 6. Voici l'une de ces solutions, de constante magique $M'_6 = 1295$:

	0	406	120	528	105	136	1295
	1	300	435	378	171	10	1295
	66	276	496	15	91	351	1295
	595	78	153	28	210	231	1295
	3	190	55	21	465	561	1295
	630	45	36	325	6	1295	1295
1295	1295	1295	1295	1295	1295	1295	1295

	66	465	780	91	1402
	1	630	105	666	1402
	300	171	496	435	1402
	1035	136	21	210	1402
1402	1402	1402	1402	1402	1402

Il existe une solution (ci-dessus à droite) pour n = 4, employant des nombres triangulaires non consécutifs, de constante magique $M'_4 = 1402$.

Peut-on trouver une « polymagie » pour ces carrés magiques de nombres triangulaires ? Pour le carré magique de gauche, formé avec les nombres triangulaires consécutifs, d'ordre n = 6, il s'agit de combinaisons de 36 termes pris 6 à 6. Il y a C_{36}^{6}=1.947.792 combinaisons de 36 termes pris 6 à 6. Il s'agit donc, parmi ces nombreuses combinaisons, de déterminer celles dont le total des termes est égal à 1295.

Ce qui est du ressort d'un logiciel ad hoc.

2.12. La polymagie des cercles magiques

Prenons comme exemples les figures de la page ci-après.

1. Dans la première figure de 4 cercles concentriques, les nombres de la série « 1 – 16 » sont présentés par groupes de 4 : il s'agit des combinaisons de 16 termes pris 4 à 4. La figure présente 8 combinaisons, dont la somme est 34, la constante magique du carré magique normal d'ordre n = 4. Il s'agit donc d'un cas semblable à celui du carré magique normal ou du carré naturel normal d'ordre n = 4.

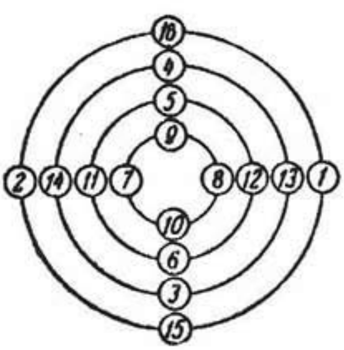
Rappelons que sur les 1820 combinaisons possibles (C_{16}^{4}= 1820), il y a 86 combinaisons des 16 premiers entiers pris 4 à 4 dont la somme est 34. La polymagie de ce cercle magique est donc la même que celle du carré magique normal d'ordre n = 4.

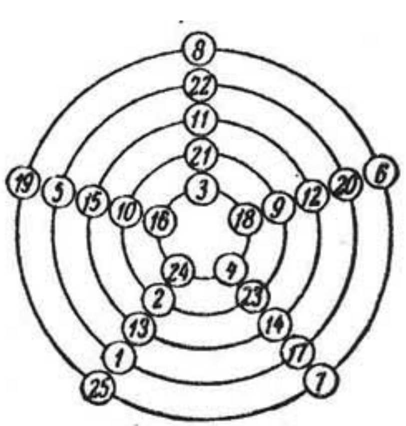
2. Dans la seconde figure, il s'agit de combinaisons des nombres de la série « 1 - 25 » pris 5 à 5. La figure présente 10 combinaisons, dont la somme est 65, la constante magique du carré magique normal d'ordre n = 5. La polymagie de ce cercle magique est donc encore identique à celle du carré magique normal d'ordre n = 5. Il y a 53.130 combinaisons différentes de 25 termes pris 5 à 5. Rappelons qu'il y a 1.394 combinaisons de 5 termes dont la somme est 65.

3. Enfin dans la troisième figure, il s'agit de combinaisons des nombres de la série « 1 – 33 » pris 9 à 9. La figure présente, dans 4 cercles concentriques et 4 diamètres, 8 combinaisons de 9 nombres dont la somme est 147.

Le nombre de combinaisons différentes de 33 termes pris 9 à 9 est de 38.567.100.

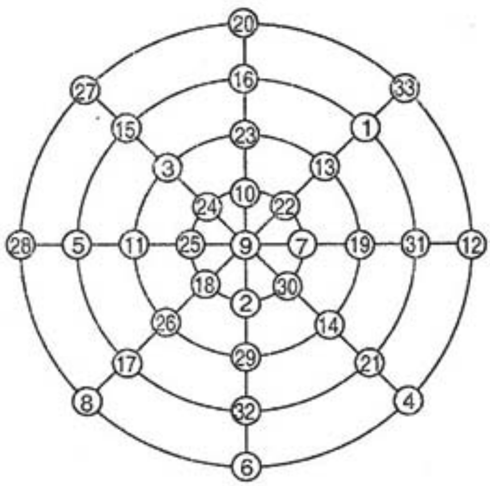
Ici il n'y a pas d'analogie avec un carré magique. Parmi le nombre important de combinaisons de 33 termes pris 9 = 9, on peut conjecturer qu'il y a de nombreuses combinaisons dont la somme des termes est 147.





Dans les cercles magiques de gauche ci-dessus, les nombres de 1 à 16 sont répartis en quatre séries de quatre sur quatre circonférences concentriques. La somme des quatre nombres situés sur chaque circonférence et sur chacun des rayons est égale à la constante magique de 34.

Dans les cercles magiques de la figure de droite, les nombres de 1 à 25 sont répartis de la même façon que précédemment, mutatis mutandis, sur cinq circonférences concentriques. La constante est 65.



Dans les cercles magiques ci-dessus, les nombres 1 a 33 sont répartis en huit séries sur quatre circonférences concentriques, un nombre occupant le centre commun. La somme des neuf nombres situés sur chacun des diamètres, et la somme des nombres situés sur chaque circonférence augmentée du nombre central, sont égales à la constante magique 147.

Cette figure se trouve dans l'ouvrage du mathématicien chinois Yang Hui, publié en 1275, et qui a pour titre « Constitution des anciennes méthodes pour élucider les étranges propriétés des nombres ».

La polymagie des cercles magiques peut naturellement être présentée graphiquement, comme celle des carré magiques, rectangles magiques…

2.13. La polymagie du cube naturel

2.13.1. Le cube naturel - Présentation

On a l'habitude de numéroter de haut en bas les différents plans ou « étages » d'un cube numérique. Le plan supérieur, n° 1, est , dans le cas qui nous occupe, un carré naturel (N).

Les plans successifs se déduisent de ce premier plan, par addition à chaque terme, d'une constante w, égale à n^2 pour le plan n° 2, 2 n^2 pour le plan n° 3, 3 n^2 pour le plan n° 4, et ainsi de suite.

1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2

10	11	12
13	14	15
16	17	18

3

19	20	21
22	23	24
25	26	27

1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2

17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32

3

33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48

4

49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60
61	62	63	64

1

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

2

26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

32	33	34
37	38	39
42	43	44

3

51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75

57	58	59
62	63	64
67	68	69

4

76	77	78	79	80
81	82	83	84	85
86	87	88	89	90
91	92	93	94	95
96	97	98	99	100

82	83	84
87	88	89
92	93	94

5

01	02	03	04	05
06	07	08	09	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

La différence entre deux termes homologues de deux plans successifs, est donc n^2.

Les propriétés du carré naturel, plan n°1, se retrouvent, *mutatis mutandis*, dans les plans suivants.

2.13.2. Les alignements

Dans les cubes naturels d'ordre impair, la somme des termes alignés sur les quatre diagonales, et les quatre médianes, est constante et égale à la constante linéaire du cube magique normal de même ordre.

. Rappelons que cette constante linéaire est donnée par la relation :

$$MC_n = \frac{1}{2}\ n\,(n^3 + 1)$$

n	3	4	5	6	7
MC_n	42	130	315	651	1204

Cette propriété n'est observée que sur les quatre diagonales dans les cubes naturels d'ordre pair.

Lorsque l'on enlève les « bordures » sur les six faces du cube naturel d'ordre n, on isole un cube numérique d'ordre « n-2 » (Exemple ci-dessus pour un cube naturel d'ordre n = 5). On observe sur ce cube central, des propriétés analogues à celles du cube formateur.

Pour n assez grand ($n \geq 6$), on peut enlever successivement plusieurs « bordures » au cube initial formateur/

En dernier lieu, on obtient un « cube résiduel »

. pour n impair, un cube d'ordre n = 3 (27 cases)

. pour n pair, un cube d'ordre n = 2 (8 cases)

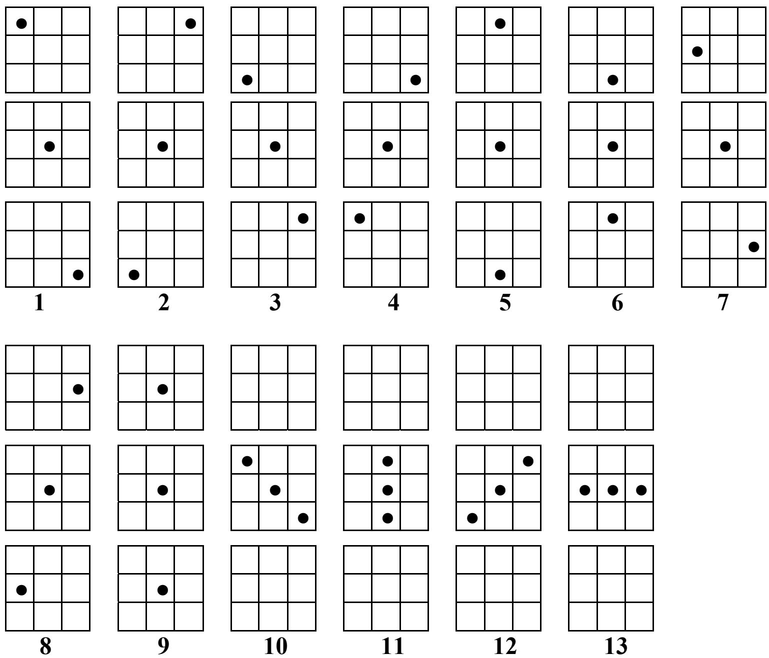
Dans ce dernier cas, la somme de ces 8 cases est : $\Sigma = 4\,(n^3 + 1)$

2.13.3. Les couples complémentaires.

n	3	4	5	6	7
n^3	27	64	125	216	343
Nombre M de couples complémentaires	13	32	62	108	171
Σ constante d'un couple complémentaire	28	65	126	217	344
Case centrale $c = \frac{1}{2}(n^3+1)$	14		63		172
MC_n	32	130	315	651	1204
$C_m^{1/2n}$		496		204156	
$C_m^{1/2(n \geq 1)}$	[13]		1891		818805

Les couples de nombres complémentaires du cube naturel ont les mêmes propriétés que celles du carré naturel. En réalité il s'agit des propriétés des séries de nombres entiers consécutifs « $1 - n^3$ », lesquelles sont un peu plus longues et un peu plus difficiles à manipuler que les séries « $1 - n^2$ » étudiées précédemment. La visualisation de ces propriétés est bien sûr possible ; elle prend cependant beaucoup de place.

Voici la visualisation des 13 alignements magiques ($MC_3 = 42$) de 3 termes des couples complémentaires du cube naturel d'ordre n = 3 : les 3 cases pointées sont également alignées dans cette visualisation graphique en plan.



2.13.4. La polymagie du cube naturel.

Parmi les combinaisons de n^3 termes pris n à n, se trouvent les combinaisons dont la somme des n termes est égale à la constante linéaire du cube magique normal d'ordre n, c'est-à-dire les « combinaisons magiques ».

n	3	4	5	6	7
MC_n	42	130	315	651	1204
$C^{n}_{n^3}$	2925	635 376	234 531 275	$1{,}315 \times 10^{11}$	$1{,}042 \times 10^{14}$
Nombre de combinaisons magiques différentes	85				

Remarque. Dans ces études, on peur donc, dans une certaine mesure, faire abstraction du carré naturel ou du cube naturel, dans leur forme géométrique, et raisonner sur les séries de nombres entiers consécutifs « $1 - n^2$ », « $1 - n^3$ »
On peut sans doute extrapoler sur les séries « $1 - n^4$ » (hypercube ?), « $1 - n^5$ »....

2.14. Application de la polymagie au cube magique

Soit par exemple le cube magique d'ordre n = 3. En réalité c'est un cube semi-magique, car il n'existe pas de cube magique ni parfait d'ordre n = 3 ; le plus petit est d'ordre n = 5.

Il y a 13 couples complémentaires qui, associés à la case centrale (c = 14), donnent la constante linéaire du cube magique d'ordre n = 3, soit $MC_3 = 42$.

Rappelons que le nombre de combinaisons des 27 termes du cube magique d'ordre n=3, pris 3 à 3, est $C_{27}^{3} = 2\,925$.

Sans écrire ces 2 925 combinaisons possibles, on peut assez facilement, avec un peu de patience et de méthode, dresser la liste des combinaisons en cause, dont la somme des 3 termes est égale à 42, sans doublets : on en trouve 85, dont les 13 couples complémentaires associés à la case centrale c = 14 encadrés dans le tableau ci-dessous.

Dans la plupart des cas, le terme médian de la série impaire « $1 - n^3$ », soit $c = \frac{1}{2}(n^3+1)$, se trouve dans la case centrale du cube magique (ou naturel). On alors : $1 + n^3 + \frac{1}{2}(n^3 + 1) = 3/2\,(n^3 + 1) = MC_n$

La méthode triviale ou manuelle n'est plus exploitable pour dresser les combinaisons de n termes dont la somme est MC_n pour les cubes magiques d'ordre $n \geq 4$. Il faut avoir recours à un programme informatique ad hoc.

$\boxed{1 + 14 + 27}$	4 + 13 + 25	$\boxed{5 + 14 + 23}$	4 + 17 + 21	7 + 16 + 19
2 + 13 + 27	5 + 12 + 25	6 + 13 + 23	5 + 16 + 21	8 + 15 + 19
3 + 12 + 27	6 + 11 + 25	7 + 12 + 23	6 + 15 + 21	$\boxed{9 + 14 + 19}$
4 + 11 + 27	7 + 10 + 25	8 + 11 + 23	$\boxed{7 + 14 + 21}$	10 + 13 + 19
5 + 10 + 27	8 + 9 + 25	0 + 10 + 23	8 + 13 + 21	11 + 12 + 19
6 + 9 + 27	1 + 17 + 24	1 + 19 + 22	9 + 12 + 21	7 + 17 + 18
7 + 8 + 27	2 + 16 + 24	2 + 18 + 22	10 + 11 + 21	8 + 16 + 18
1 + 15 + 26	3 + 15 + 24	3 + 17 + 22	3 + 19 + 20	9 + 15 + 18
$\boxed{2 + 14 + 26}$	$\boxed{4 + 14 + 24}$	4 + 16 + 22	4 + 18 + 20	$\boxed{10 + 14 + 18}$
3 + 13 + 26	5 + 13 + 24	5 + 15 + 22	5 + 17 + 20	11 + 13 + 18
4 + 12 + 26	6 + 12 + 24	$\boxed{6 + 14 ° 22}$	6 + 16 + 20	9 + 16 + 17
5 + 11 + 26	7 + 11 + 24	7 + 13 + 22	7 + 15 + 20	10 + 15 + 17
6 + 10 + 26	8 + 10 + 24	8 + 12 + 22	$\boxed{8 + 14 + 20}$	$\boxed{11 + 14 + 17}$
7 + 9 + 26	1 + 18 + 23	9 + 11 + 22	9 + 13 + 20	12 + 13 + 17
1 + 16 + 25	2 + 17 + 23	1 + 20 + 21	10 + 12 + 20	11 + 15 + 16
2 + 15 + 25	3 + 16 + 23	2 + 19 + 21	5 + 18 + 19	$\boxed{12 + 14 + 16}$
$\boxed{3 + 14 + 25}$	4 + 15 + 23	3 + 18 + 21	6 + 17 + 19	$\boxed{13 + 14 + 15}$

On vérifie ces propriétés sur la représentation graphique du cube magique d'ordre n=3 pris pour exemple.

On compte au total :

- 3 carré magiques (n° 4,5 et 6)
- 6 carrés semi-magiques (n° 1, 2, 3, 7, 8 et 9) : les « petites diagonales » ne sont pas magiques.
- 4 diagonales magiques du cube.

Avec les caractéristiques suivantes :

- Nombres de carrés numériques 15
- Nombre d'alignements de 3 termes 124
- Nombre total d'alignements magiques 97

- Nombre d'alignements magiques différents 37
- Nombre d'alignements magiques de couples complémentaires 13
- Combinaisons de 3 termes magiques 85
- Combinaisons magiques non alignées 48

2.14.1. Le cube magique d'ordre n = 3

. Les 9 coupes orthogonales

18	20	4
22	9	11
2	13	27

	18	20	4	42
1	22	9	11	42
	2	13	27	42
15	42	42	42	54

	2	13	27	42
2	16	21	5	42
	24	8	10	42
72	42	42	42	33

	2	22	18	42
3	16	3	23	42
	24	17	1	42
45	42	42	42	6

23	7	12
3	14	25
16	21	5

	23	7	12	42
4	3	14	25	42
	16	21	5	42
42	42	42	42	42

	22	9	11	42
5	3	14	25	42
	17	19	6	42
42	42	42	42	42

	13	9	20	42
6	21	14	7	42
	8	19	15	42
42	42	42	42	42

1	15	26
17	19	6
24	8	10

	1	15	26	42
7	17	19	6	42
	24	8	10	42
69	42	42	42	30

	18	20	4	42
8	23	7	12	42
	1	15	26	42
12	42	42	42	51

	27	11	4	42
9	5	25	12	42
	10	6	26	42
39	42	42	42	78

. Les 6 coupes diagonales

	18	9	27	54
10	29	14	5	42
	1	19	10	30
42	42	42	42	42

	2	22	18	42
11	21	14	7	42
	10	6	26	42
42	33	42	51	42

	2	13	27	42
12	3	14	25	42
	24	8	10	42
65	29	23	62	26

	2	9	4	15
13	16	14	12	42
	24	19	26	69
42	42	42	42	42

	27	11	4	42
14	21	14	7	42
	24	17	1	42
42	72	42	42	42

	18	20	4	42
15	3	14	25	42
	24	8	10	42
62	45	42	39	42

. Les 4 diagonales magiques du cube

2	14	26	42
18	14	10	42
4	14	24	42
27	14	1	42

Ces 4 diagonales sont comprises dans les coupes diagonales n° 10, 11 et 14.

Remarques.

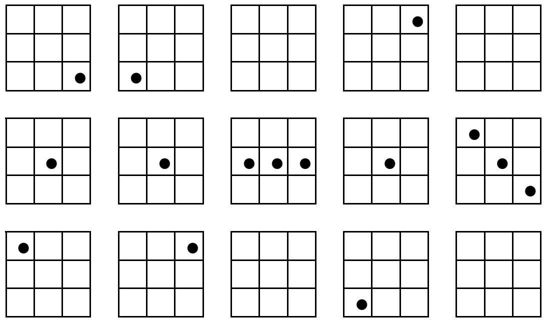
- Dans tout cube numérique d'ordre n = 3, rempli avec les entiers de la série 1 -n^3, dans un ordre quelconque, on trouve évidemment au moins 85 combinaisons de 3 termes, dont la somme est égale à $MC_3 = 42$.
- Existe-t-il des « cubes magiques à bordures », c'est-à-dire des cubes magiques qui restent magiques lorsque l'on enlève la bordure extérieure sur leurs six faces ?

Visualisation, sur le cube magique d'ordre n = 3,
des 13 couples complémentaires associée à la case centrale (Σ = 42)
(On retrouve les mêmes dispositions que pour le cube naturel).

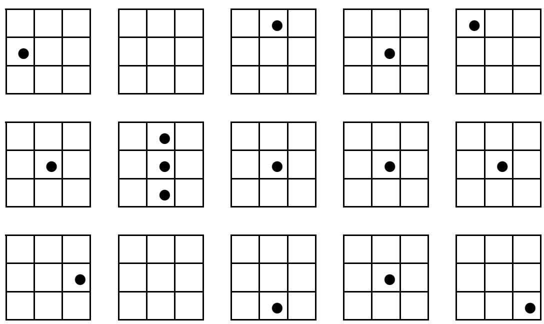
18	20	4
22	9	11
2	13	27

23	7	12
3	14	25
16	21	5

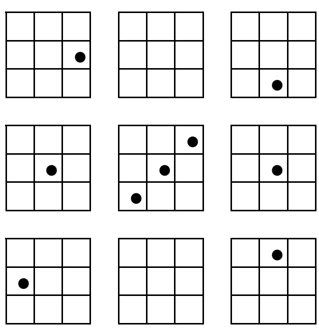
1	15	26
17	19	6
24	8	10



1 2 3 4 5



6 7 8 9 10



11 12 13

2.14.2. Le plus petit cube magique parfait

Par définition, dans un cube magique, la magie est assurée dans les n^2 lignes, et les n^2 colonnes des plans horizontaux, dans les n^2 piles verticales, ainsi que dans les 4 diagonales du cube. Au total on a $3\ n^2 + 4$ alignements magiques de n termes. Dans un cube magique parfait, il faut ajouter la magie des diagonales , dites « petites diagonales » des séries de coupes orthogonales, soit 2 (3 n) alignements magiques. Au total on a donc $3\ n^2 + 6\ n + 4$ alignements magiques différents.

Le cube magique aurait été inventé, en Occident du moins, par Pierre de Fermat en 1640. Un cube magique parfait d'ordre 7 a été construit par A.H. Frost en 1866. Des cubes magiques parfaits d'ordre 8 et 9 ont été construits par la suite. Un cube magique parfait d'ordre 12 a été présenté par Benson et Jacobi en 1976.

On a démontré que les cubes magiques parfaits d'ordre 3 et 4 étaient impossibles à réaliser. Il fallut attendre septembre 2003, pour que soit découvert un cube magique parfait d'ordre 5, construit par Christian Boyer et Walter Trump.

C'est donc le plus petit cube magique parfait.

Le nombre d'alignements magiques différents de 5 termes est ainsi :

$$3\ n^2 + 6\ n + 4 = 75 + 30 + 4 = 109$$

En réalité, dans les 21 carrés magiques que l'on peut obtenir dans ce cube, soit 15 coupes orthogonales et 6 coupes diagonales, on compte ainsi 21 x 12 = 252 alignements magiques, y compris les doublets ; les 4 diagonales du cube sont comprises dans les coupes diagonales.

Si l'on envisage la polymagie de ce cube magique parfait d'ordre 5, comme on l'a présentée précédemment, le nombre de séries de 5 termes, alignés et non alignées, dont la somme des termes est égale à la constante magique de ce cube, soit $MC_5 = 315$, est beaucoup plus important, et atteint le nombre de 1394.

25	16	80	104	90
115	98	4	1	97
40	11	85	2	75
66	72	27	100	49
67	18	119	106	5

91	77	71	6	70
52	64	117	69	13
30	118	21	123	23
26	39	92	44	114
116	17	14	79	95

47	61	45	76	86
107	43	38	33	94
89	68	63	58	37
32	93	88	89	19
40	50	81	65	79

Sont représentés ci-contre les cinq plans horizontaux ou *étages* du cube magique parfait d'ordre 5 de Boyer et Trump.

31	59	112	109	10
12	82	34	87	100
103	3	105	8	96
113	57	9	62	74
56	120	55	49	35

121	108	7	20	59
29	28	122	125	11
51	15	41	124	84
78	54	99	24	60
36	110	46	22	101

Bibliographie spécifique.

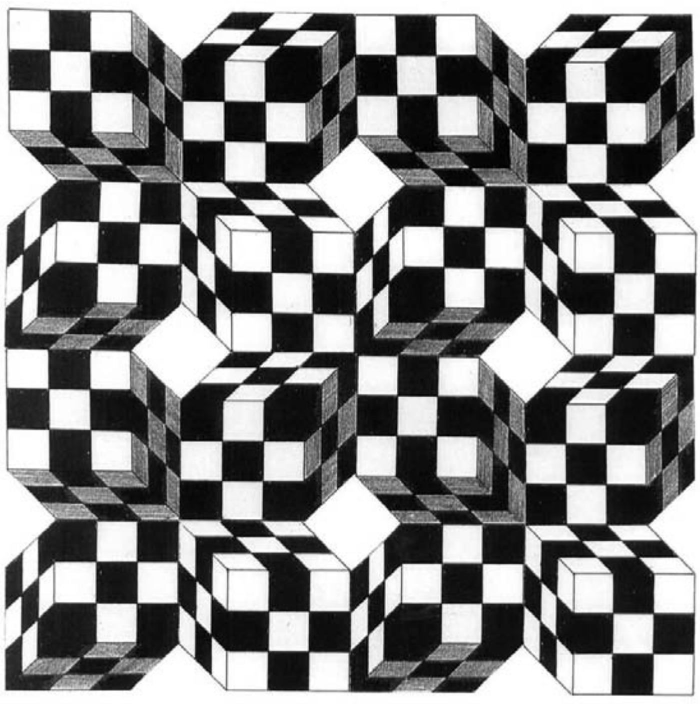
▪ Christian Boyer, *Pour la Science*, Janvier 2008, p. 31 et *Science et Aveni*r, même date, p. 20 (« Les carrés magiques de nombres triangulaires »).

▪ A. H. Frost, « Invention of magic cubes, and construction of magic squares possessing additional properties », *The Quaterly Journal of pure and applied mathematics*, 7 (1866), pp. 92 – 101.

▪ William H. Benson & Ostwald Jacobi, *New Recreations with magic squares*, Dover Publications, New York, 1976.

▪ Caroline de Malet, « Le plus petit cube magique parfait », *Le Figaro*, 6 janvier 2004.

▪ René Descombes, *La Magie du carré* et *Les Carrés magiques*, *op. cit*. (Dans ce deuxième ouvrage, j'ai présenté 24 « combinaisons magiques » du carré de Dürer p. 126 ; j'avoue que j'étais bien loin du compte : il y en a en réalité 86 !)



Composition de Hannes Bürgel – Dresden

Planche IV : Visualisation sur le « carré de Dürer » des 86 combinaisons des 16 premiers entiers pris 4 à 4, dont la somme des 4 termes est égale à M_4=34.

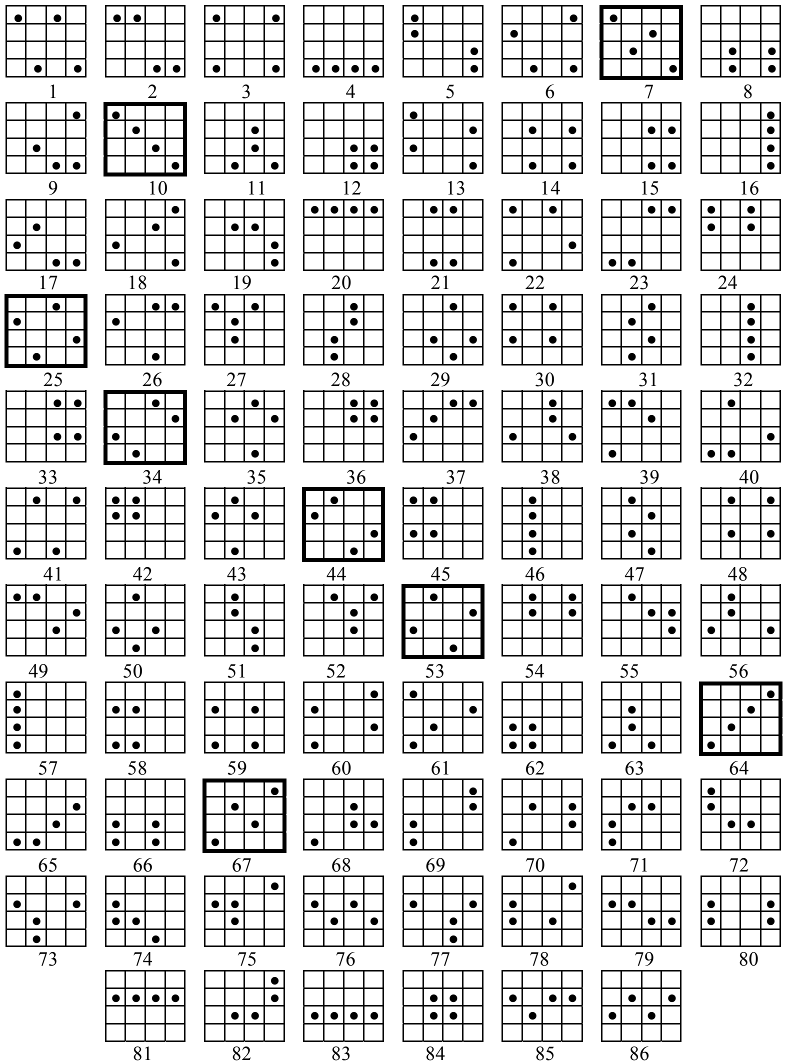


Planche IV B : Visualisation sur le « carré de Moesner » des 86 combinaisons des 16 premiers entiers pris 4 à 4, dont la somme des 4 termes est égale à M_4 = 34.

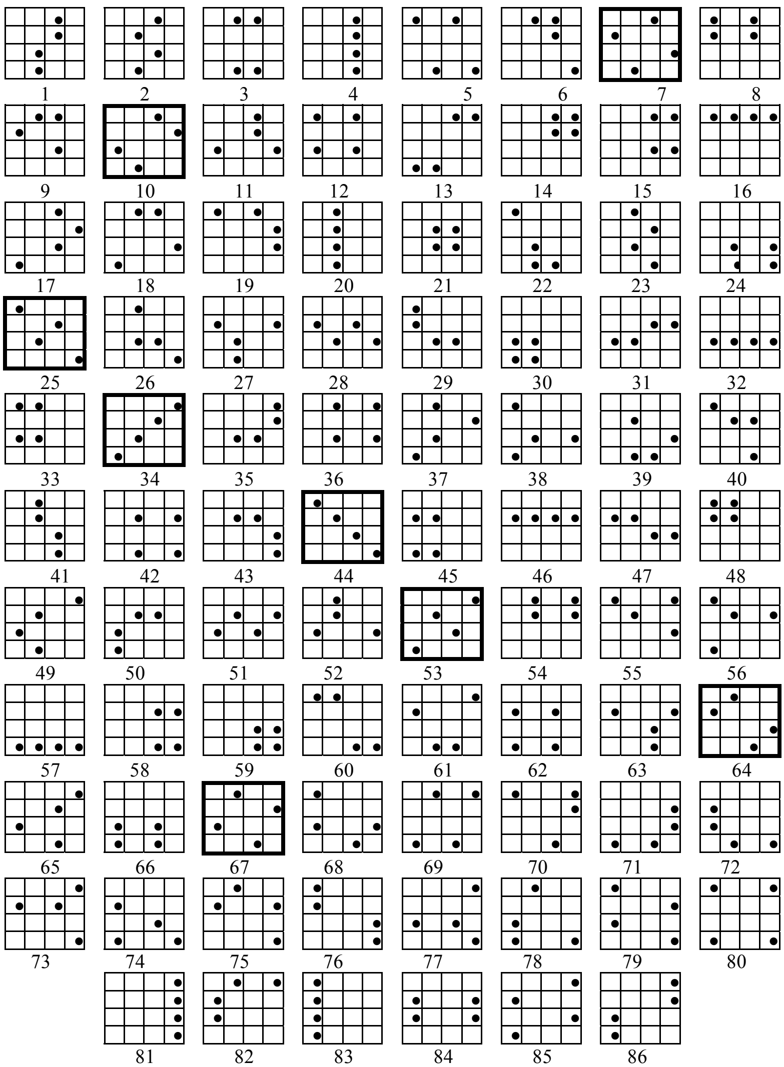


Planche V : Visualisation sur le « carré naturel » d’ordre n = 4, des 86 combinaisons des 16 premiers entiers pris 4 à 4, dont la somme des 4 termes est égale à $M_4 = 34$.

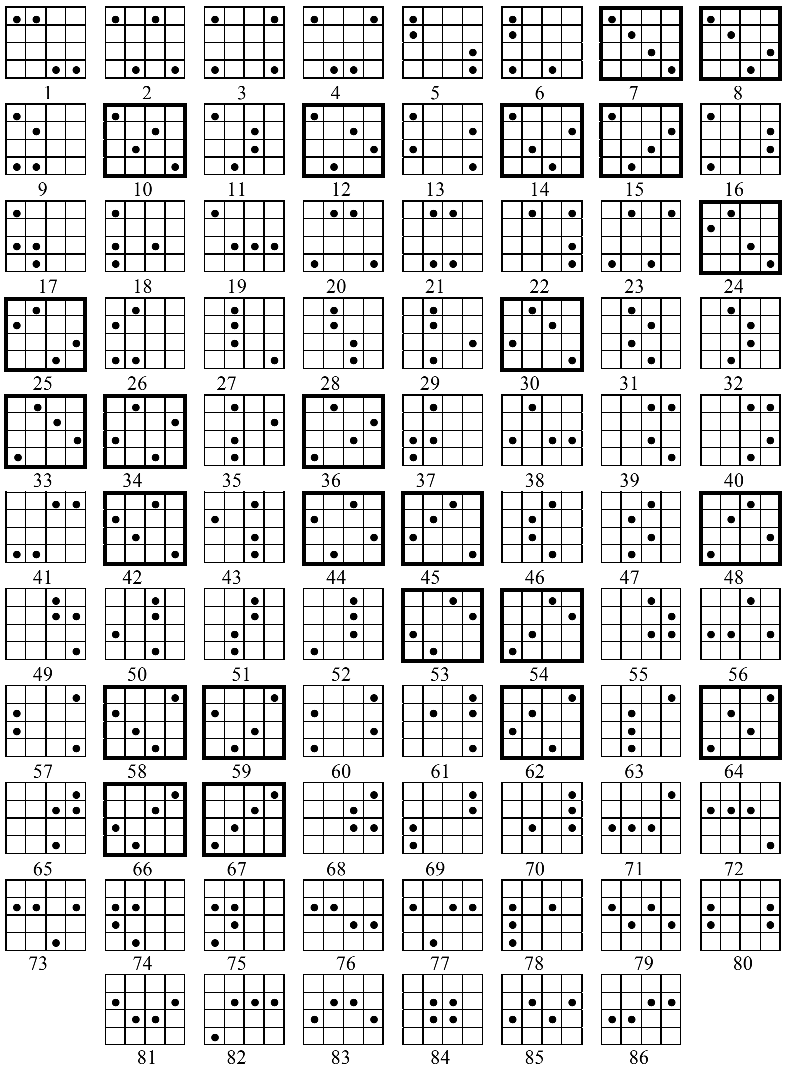


Planche VI –1 – Visualisation des 120 permutations figurées magiques du carré naturel d'ordre n = 5

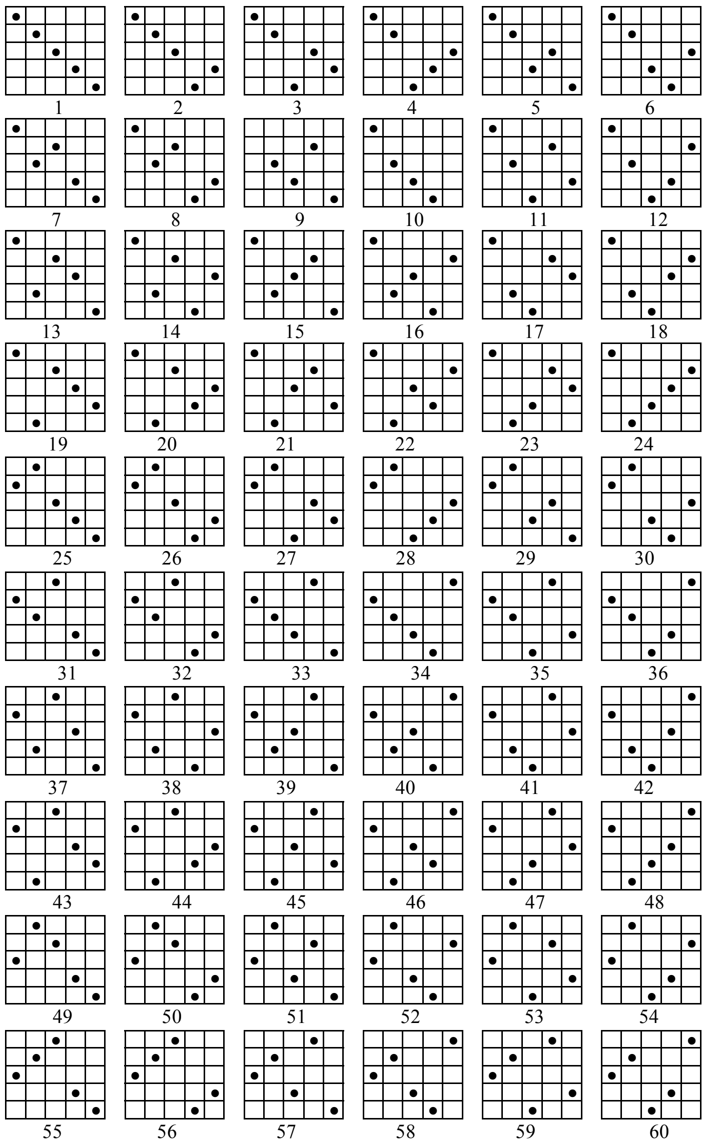
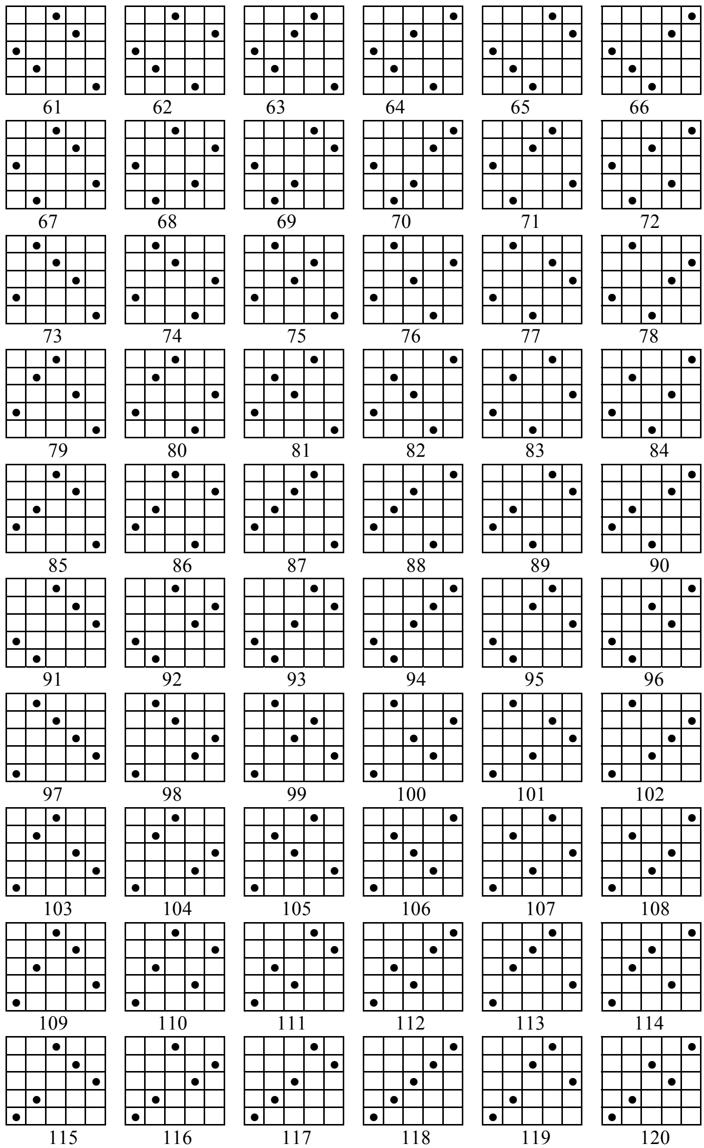


Planche VI – 2 – Visualisation des 120 permutations figurées magiques du carré naturel d'ordre n = 5



3. Les combinaisons complémentaires et leur dénombrement

Nous avons signalé à plusieurs reprises la présence de ces « combinaisons complémentaires » tout-à-fait particulières.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

n pair

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

n impair

Ainsi, dans un carré magique et dans un carré naturel, l'association à la case centrale, réelle ou virtuelle, de ½ n (pour n pair) , ou ½ (n-1) (pour n impair) couples de nombres complémentaires, donne une somme égale à la constante linéaire du carré magique normal de même ordre.

3.1 Dénombrement des combinaisons complémentaires

On connaît le nombre Nn des couples complémentaires dans une grille d'ordre N. Rappelons-cela :

n pair - $N_n = ½\, n^2$ n impair - $N_n = ½\,(n^2 – 1)$

Il s'agit donc de combinaisons de m éléments (les couples) pris p à p (½ n ou ½ (n-1) suivant la parité de n).

On peut alors dresser le tableau de ces combinaisons complémentaires en fonction de n :

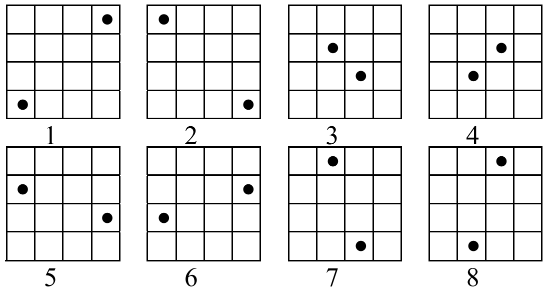
N	3	4	5	6	7	8
N_n	4	8	12	18	24	32
$C_{Nn}^{1/2n}$		28		816		35 960
$C_{Nn}^{1/2(n-1)}$	[8]		66		2 024	

La visualisation de ces combinaisons complémentaires apparaît dans les Planches ci après pour les carrés naturels d'ordre n = 4 et n = 5.

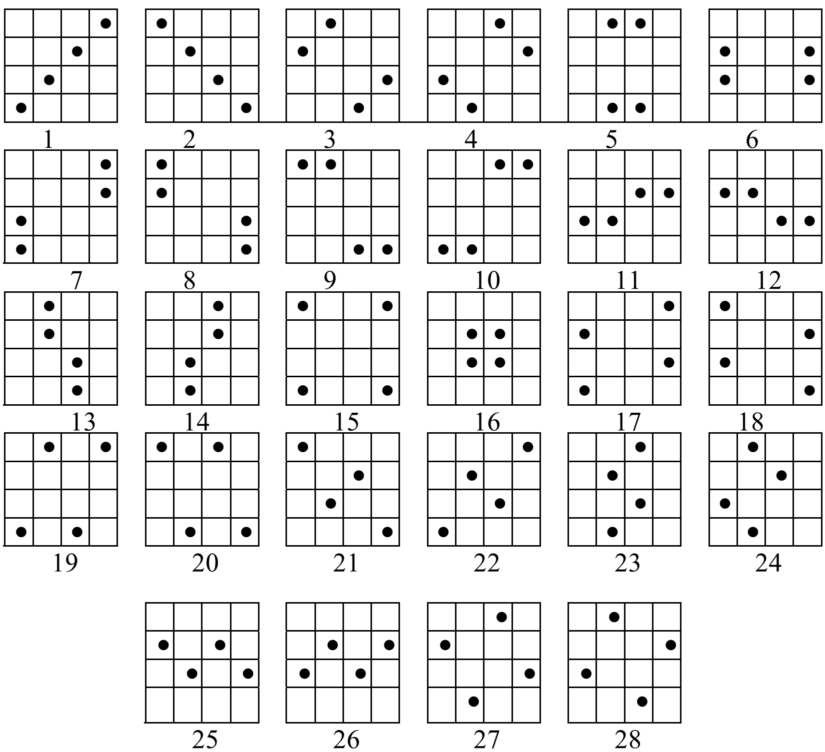
Combinaisons complémentaires pour les carrés naturels d'ordre n = 4

Voici les 8 couples complémentaires d'ordre n = 4 :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Et la visualisation des 28 combinaisons des 8 couples complémentaires pris 2 à 2. $C_8^2 = 28$:

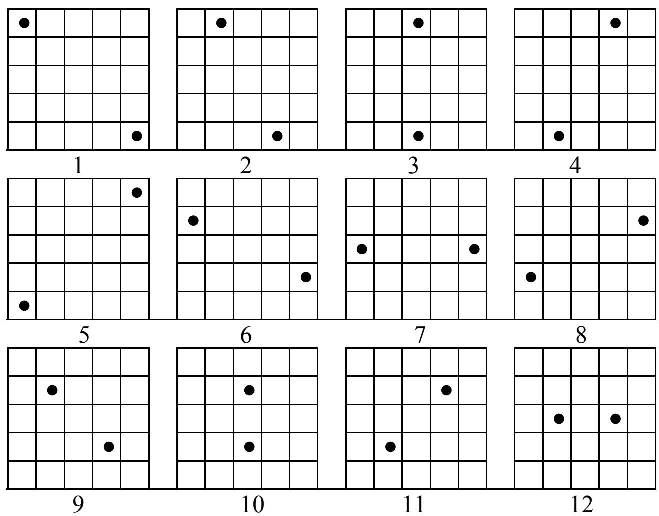


Ces 28 combinaisons complémentaires se retrouvent bien sûr parmi les 86 combinaisons de 16 termes pris 4 à 4 dans le carré magique normal de même ordre, dont la somme est égale à la constante linéaire $M_4 = 34$

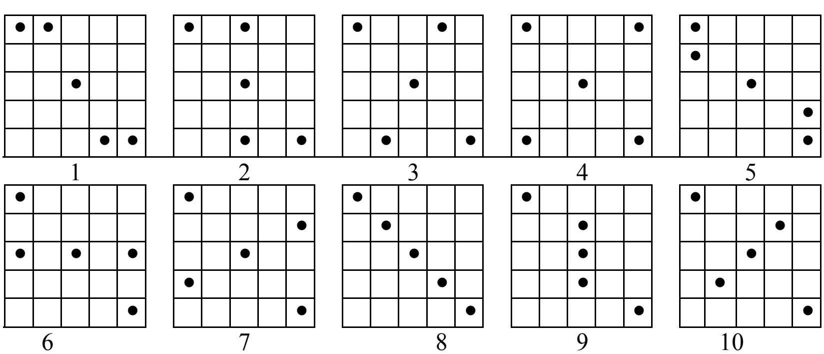
3.3 Combinaisons complémentaires pour les carrés naturels d'ordre n = 5

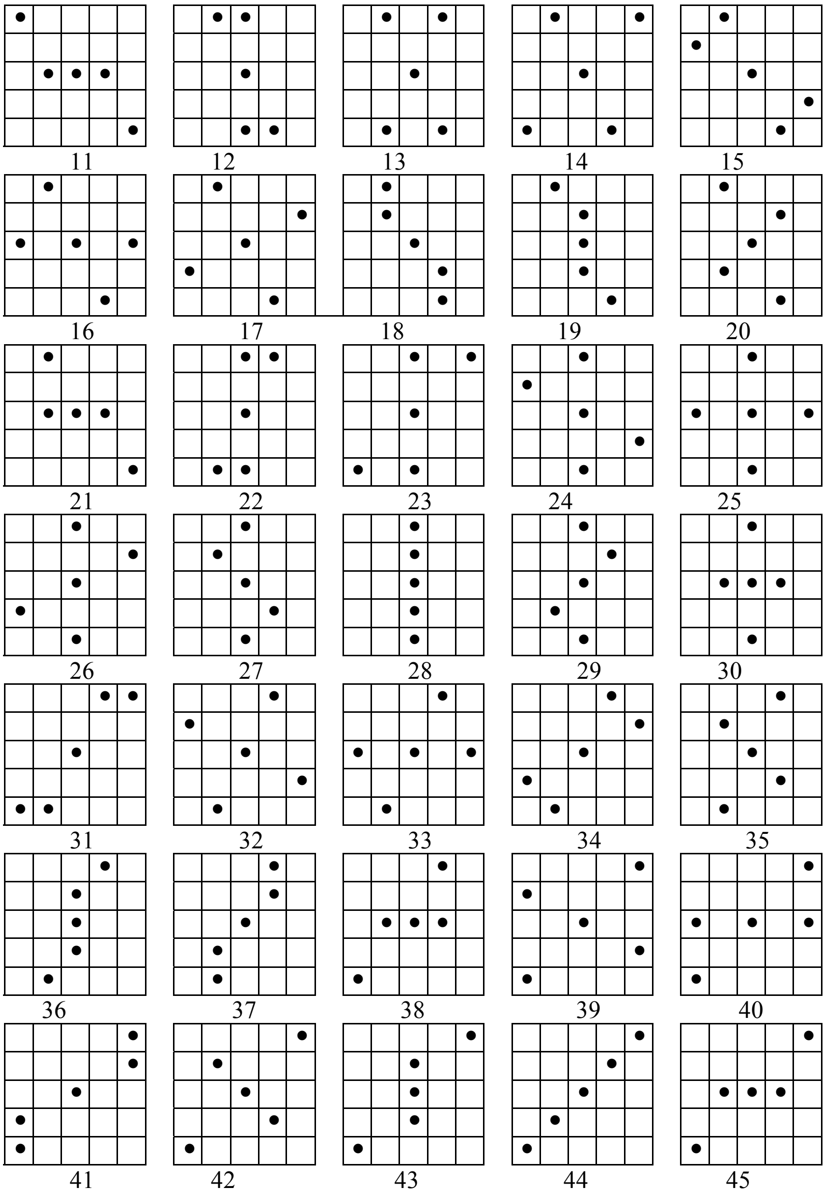
Voici les 12 couples complémentaires d'ordre n = 5 :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

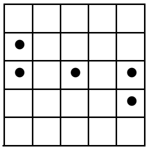
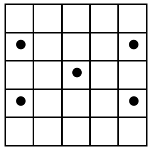
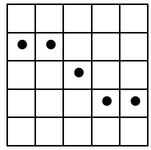
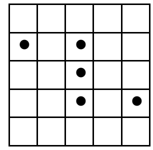
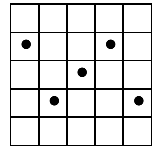


Et la visualisation des 66 combinaisons complémentaires de 12 couples pris 2 à 2 : $C_{12}^{2} = 66$, associées à la case centrale (n impair).

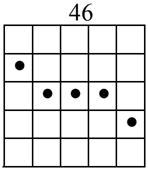
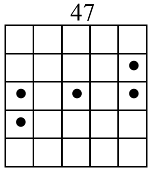
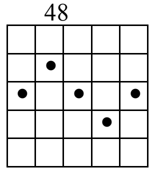
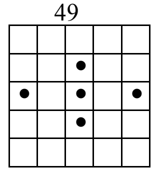
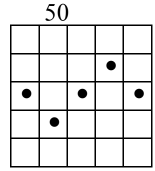




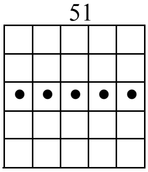
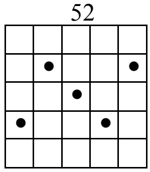
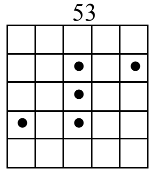
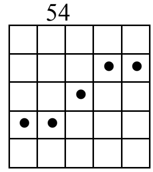
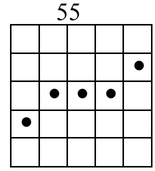
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 22 23 24 25
26 27 28 29 30
31 32 33 34 35
36 37 38 39 40
41 42 43 44 45

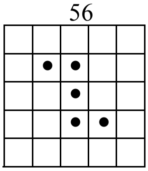
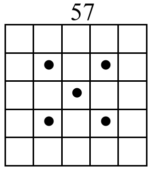
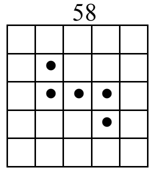
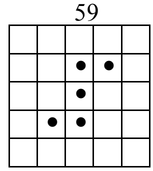
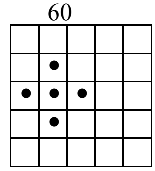
46 47 48 49 50

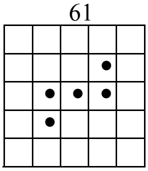
51 52 53 54 55

56 57 58 59 60

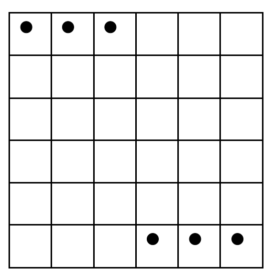
61 62 63 64 65



66

Pour n=6, Il faut associer 3 couples complémentaires. Pour n = 6, il y a 18 couples complémentaires. On aura donc $C_{18}^{3} =$ 816.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36



Dans le carré naturel d'ordre n = 6, il y a ainsi 816 combinaisons de 6 nombres dont la somme est égale à la constante linéaire du carré magique normal de même ordre, soit $M_6 = 111$. Exemple ci-dessus.

4. Quelques propriétés particulières du carré naturel

4.1. Des maxima et des minima

Rappelons que dans une grille carrée ou rectangulaire, dont les cases sont rem-plies avec des nombres tous différents (ce qui est le cas des carrés magiques normaux ou non, par exemple),on observe que le minimum des maxima des termes des colonnes, est toujours supérieur ou égal, au maximum des minima des termes des lignes.

					min	max
	1	6	12	15	1	15
	16	11	5	2	2	16
	13	10	8	3	3	**13**
	4	7	9	14	**4**	14
max	16	**11**	12	15		
min	1	**6**	5	2		

On peut bien sûr inverser la proposition, mutatis mutandis. Exemple ci-dessus : 11 > 4 et 13 > 6

C'est dans le carré naturel que ces quantités sont égales :
13 = 13 et 4 = 4

					min	Max
	1	2	3	4	1	**4**
	5	6	7	8	5	8
	9	10	11	12	9	11
	13	14	15	16	**13**	16
max	**13**	14	15	16		
min	1	2	3	**4**		

4.2. Des différences constantes

Considérons les sous – carrés de 2 x 2 = 4 cases. La somme $\Sigma(\Delta)_n$ des 4 différences, en valeur absolue, des deux termes situés sur chacun des quatre côtés, est constante.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dans l'exemple ci-contre, avec n = 4, cette somme $\Sigma(\Delta)_4 = 10$, soit

$$\Sigma(\Delta)_n = 2\,(n + 1)$$

n	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\Sigma(\Delta)_n$	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**

Cette propriété a été établie par Michel Criton.

4.3. Une application des nombres complémentaires au carré naturel

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

I

1	2	3	4
5	6	7	8
12	11	10	9
16	15	14	13
34	34	34	34

II

	16	2	3	13	34
	5	11	10	8	34
	12	6	7	9	34
	1	15	14	4	34
30	34	34	34	34	38

III

. Soit le carré naturel d'ordre n = 4 (I)

. On permute les termes des deux dernières lignes de la grille I par rapport à la médiane verticale (II). Toutes les colonnes sont magiques : $M_8 = 34$: c'est la somme de deux couples de nombres complémentaires.

. Dans les colonnes, on permute alors par rapport à la médiane horizontale

- les deux termes extrêmes des colonnes extrêmes ;
- les deux termes centraux des colonnes centrales.

Ce qui rend les lignes magiques. (III). La grille numérique obtenue n'est cependant qu'un carré semi-magique : les diagonales principales ne sont pas magi-ques, mais elles sont complémentaires (30 + 38 = 68 = 2 x 34).

Application à une grille d'ordre n = 6 ($M_6 = 111$)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

I

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
30	29	28	27	26	25
36	35	34	33	32	31
111	111	111	111	111	111

II

III

Les colonnes étant magiques, il s'agit de rendre les lignes magiques par permutations des termes des colonnes : est-ce possible ?

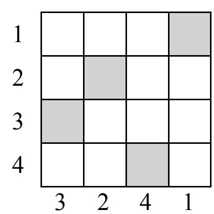
5. Propriétés particulières du carré naturel alterné

5.1. Les permutations figurées.

Dans une grille d'ordre n, les cases de chaque colonne étant numérotées de 1 à n en descendant, on poche les cases correspondantes de la suite numérique de n termes portée au droit de ces cases le long du bord inférieur de la grille : on obtient la permutation figurée de la suite de n termes en cause. Ainsi aucune case poché n'est alignée avec une autre dans les colonnes et les lignes. Lorsque l'on ne rencontre qu'une seule case pochée dans chaque diagonale principale, on a affaire à une permutation figurée diagonale.

Le nombre total P_n de permutations de n termes alignés, est donné par la formule : $P_n = n$! (factorielle n)

Exemple. Pour n = 4 : $P_4 = 4 ! = 24$; on a 24 permutations, et 24 permutations figurées, dont 8 diagonales.



Permut. fig. de 4 termes

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$M_4 = 34$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

$M_5 = 65$

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

$M_6 = 111$

1 – Dans un carré naturel d'ordre n, la somme des n termes situés sur toute permutation figurée de n termes est constante, et égale à la constante linéaire M_n du carré magique normal de même ordre. Exemples ci-dessus.

Le nombre de *permutations* $P_n = f(n) = n$! est donné dans le tableau ci-dessous :

Ordre n du carré naturel	4	5	6
Nombre de permutations $P_n = n$!	24	120	720

En réalité il y a beaucoup plus de *combinaisons* possibles de n^2 termes pris n à n, nombre donné par la relation suivante :

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Exemple : avec $m = n^2 = 5^2 = 25$; et $p = n = 5$: $C_{25}^5 = 53\ 120$

Dans les carrés naturels d'ordre impair, les termes situés sur les médianes ont également la même somme constante.

2 – Les couples de nombres complémentaires sont situés sur les cases complémentaires. Leur somme est constante et égale à $(n^2 + 1)$.

Exemple. Pour $n = 4 : 2 + 15 = 17 = 4^2 + 1$; pour $n = 6 : 9 + 28 = 37 = 6^2 + 1$.

3 – On observe que :

- les termes des lignes sont en progression arithmétique de raison $r = 1$ (par définition) ;
- les termes des colonnes sont en progression arithmétique de raison $r = n$;
- les termes des diagonales principales et brisées sont en progression arithmétique de raison $r = (n-1)$ et $r = (n+1)$.

En conséquence, dans toute ligne, colonne et diagonale principale et brisée, les termes a égale distance des extrémités de la suite de ces termes, ont la même somme.

4 – Les sommes de deux termes situés aux extrémités des diagonales de tout carré, rectangle ou parallélogramme intérieur, sont égales.

5 – Si on juxtapose en « tapis » un carré naturel d'ordre n, on retrouve certaines propriétés du carré formateur dans toute grille d'ordre n prise dans ce tapis (cf. « Tapis et pavages magiques »)

Ces propriétés importantes sont utilisées dans certaines méthodes de construction des carrés magiques normaux à partir d'un carré naturel, ou d'un tapis de carrés naturels (Méthode Fourrey, par exemple)

5.2. Le carré naturel alterné (rappel)

Dans une grille de n^2 cases, on écrit les n^2 premiers entiers consécutifs dans leur ordre naturel, mais en alternant le sens de l'écriture. Il existe 4 formes de carrés naturels alternés.

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

Alterné naturel AN

5	4	3	2	1
6	7	8	9	10
15	14	13	12	11
16	17	18	19	20
25	24	23	22	21

Alterné miroir AM

21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

Alt. nat. inversé. ANI

25	24	23	22	21
16	17	18	19	20
15	14	13	12	11
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Alt.m.inversé AMI

Comme précédemment, on se contentera d'étudier les propriétés du carré naturel alterné AN. Ces propriétés ne sont pas aussi simples que pour le carré naturel normal N.

5.3. Propriétés des termes situés sur les permutations figurées.

On constate à l'expérience que les sommes Σ des termes situés sur les permutations figurées d'un carré naturel alterné, peuvent être regroupées suivant une suite en progression arithmétique de raison r = 2.

Exemple pour n = 4

La solution triviale consiste à faire la somme des termes situés sur chacune des 24 permutations figurées de 4 termes :

1+7+11+13=32	8+2+11+13=34	9+2+6+13=30	16+2+6+12=36
1+7+14+12=34	8+2+14+12=36	9+2+14+5=30	16+2+11+5=34
1+10+6+13=30	8+10+3+13=34	9+7+3+13=32	16+7+3+12=38
1+10+14+5=30	8+10+14+4=36	9+7+14+4=34	16+7+11+4=38
1+15+6+12=34	8+15+3+12=38	9+15+3+5=32	16+10+3+5=34
1+15+11+5=32	8+15+11+4=38	9+15+6+4=34	16+10+6+4=36

On peut regrouper ainsi qu'il suit les résultats de ces sommes Σ :

Sommes Σ (4 termes)	30	32	34	36	38	raison r = 2
Nbre de sommes Σ identiques	4	4	8	4	4	Total 24

Exemple pour n = 5

On peut encore faire l'essai pour n = 5. Le nombre de permutations de 5 éléments est P_5 = 5 ! = 120 ; c'est encore faisable. On peut regrouper les résultats des sommes Σ correspondantes ainsi) :

Sommes Σ (5 termes)	59	61	63	65	67	69	71	raison r = 2
Nbre de sommes Σ identiques	12	12	24	24	24	12	12	Total 120

Il est intéressant de pouvoir établir la suite Σ sans recourir à la solution triviale.

Si l'on connaît le premier terme $a_1 = \Sigma a$ (la plus petite somme) et le dernier terme $a_z = \Sigma z$ (la plus grande somme), connaissant r = 2, on a facilement le nombre z de termes de cette suite :

avec $a_z = a_1 + (z-1)\,r$; d'où : $z = \dfrac{a_z - a_1 + r}{r} = \dfrac{\Sigma z - \Sigma a + r}{r}$

Nota : Voir les 24 permutations de 4 éléments et les 120 permutations de 5 éléments, dans R. Descombes*, Les Carrés magiques*, *op. cit.*, pp. 97 et 98-99.

5.4. Détermination directe de la plus grande et de la plus petite somme Σ

5.4.1. Cas de la plus grande somme Σz

On poche le plus grand terme de la dernière ligne (ligne du bas), puis dans la ligne au-dessus, on poche le plus grand terme non aligné avec le précédent, et ainsi de suite, en remontant ligne par ligne : une bonne technique !

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

$\Sigma\, z_4 = 38$ $\Sigma\, z_5 = 71$ $\Sigma\, z_6 = 120$

5.4.2. Cas de la plus petite somme $\Sigma\, a$

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

$\Sigma\, a_4 = 30$ $\Sigma\, a_5 = 59$ $\Sigma\, a_6 = 102$

La technique est analogue à la précédente : on poche le plus petit terme dans la première ligne (c'est toujours l'unité), puis on poche le plus petit terme de la seconde ligne non aligné avec l'unité (c'est donc n + 1), et ainsi de suite en descendant ligne par ligne.

Voici une application pour n = 9 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10
19	20	21	22	23	24	25	26	27
36	35	34	33	32	31	30	29	28
37	38	39	40	41	42	43	44	45
54	53	52	51	50	49	48	47	46
55	56	57	58	59	60	61	62	63
72	71	70	69	68	67	66	65	64
73	74	75	76	77	78	79	80	81

$\Sigma\, z_9 = 389$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10
19	20	21	22	23	24	25	26	27
36	35	34	33	32	31	30	29	28
37	38	39	40	41	42	43	44	45
54	53	52	51	50	49	48	47	46
55	56	57	58	59	60	61	62	63
72	71	70	69	68	67	66	65	64
73	74	75	76	77	78	79	80	81

$\Sigma\, a_9 = 349$

5.5. Recherche d'une relation donnant Σ a et Σ z en fonction de n.

En observant la structure des permutations figurées par la technique exposée, on aboutit à une relation donnant par le calcul la plus grande (Σ z) et la plus petite (Σ a) somme de la suite Σ **.**

On se reportera aux grilles correspondantes dans les pages qui précèdent.

- Cas de la plus grande somme Σ z pour n = 4 : on a $\Sigma z_4 = 16 + 12 + 7 + 3 = 38$ soit en fonction de n :

$$\Sigma z_4 = n^2 + (n^2-n) + (n^2 - 2n - 1) + (n^2 - 3n - 1) = 4n^2 - 6n - 2$$

- Cas de la plus grande somme Σ z pour n = 5 :

on a $\Sigma z_5 = 25 + 20 + 14 + 9 + 3 = 71$

$$= n^2 + (n^2-n) + (n^2 - 2n - 1) + (n^2 - 3n - 1) + (n^2-4n-2) = 5n^2 - 10n - 4$$

- Cas de la plus grande somme Σ z pour n = 6 :

On a $\Sigma z_6 = 36 + 30 + 23 + 17 + 10 + 4 = 120$

$$= n^2 + (n^2-n) + (n^2 - 2n - 1) + (n^2 - 3n - 1) + (n^2-4n-2) + (n^2-5n-2) = 6n^2 - 15n - 6$$

On peut alors récapituler et extrapoler ces relations :

$$\begin{aligned}
n = 4 \ - \ \Sigma z_4 &= 4n^2 - 6n - 2 = 38 \\
n = 5 \ - \ \Sigma z_5 &= 5n^2 - 10n - 4 = 71 \\
n = 6 \ - \ \Sigma z_6 &= 6n^2 - 15n - 6 = 120 \\
n = 7 \ - \ \Sigma z_7 &= 7n^2 - 21n - 9 = 187 \\
n = 8 \ - \ \Sigma z_8 &= 8n^2 - 28n - 12 = 276 \\
n = 9 \ - \ \Sigma z_9 &= 9n^2 - 36n - 16 = 389 \text{ (etc.)}
\end{aligned}$$

On constate que la généralisation donne une formule différente pour :

n pair : $$\Sigma z_{n \text{ pair}} = n^3 - n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - \frac{n^2 - 2n}{4} = \frac{n(2n^2 + n + 2)}{4}$$

n impair : $$\Sigma z_{n \text{ impair}} = n^3 - n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - \frac{n^2 \geq 2n + 1}{4}$$

$$= \frac{n(2n^2 + n + 2) - 1}{4}$$

Cas de la plus petite somme Σ a

Les résultats de l'analyse de la structure des permutations figurées, faite comme précédemment, sont les suivants :

$$\begin{aligned}
n = 4 \ - \ \Sigma a_4 &= 6n + 6 = 30 \\
n = 5 \ - \ \Sigma a_5 &= 10n + 9 = 59 \\
n = 6 \ - \ \Sigma a_6 &= 15n + 12 = 102 \\
n = 7 \ - \ \Sigma a_7 &= 21n + 16 = 165 \\
n = 8 \ - \ \Sigma a_8 &= 28n + 20 = 244 \\
n = 9 \ - \ \Sigma a_9 &= 36n + 25 = 349 \text{ (etc.)}
\end{aligned}$$

La généralisation donne les résultats ci-dessous :

n pair : $\Sigma a_{n \text{ pair}} = \dfrac{n(2n^2 \geq n + 2)}{4}$ n impair $\Sigma a_{n \text{ impair}} = \dfrac{n(2n^2 - n + 2) + 1}{4}$

Ces formules permettent donc de calculer la valeur de la plus grande (Σ z) et de la plus petite (Σ a) somme Σ, mais ne donnent évidemment pas toutes les solutions possibles.

Voici quelques solutions pour n = 4 et n = 5.

Pour n = 4 : 4 solutions pour $\Sigma\ z_4$ ainsi que pour $\Sigma\ a_4$

1	2	**3**	4
8	7	6	5
9	10	11	**12**
16	**15**	14	13

1	2	3	**4**
8	7	6	5
9	10	**11**	12
16	**15**	14	13

1	2	**3**	4
8	**7**	6	5
9	10	11	**12**
16	15	14	13

1	2	3	**4**
8	**7**	6	5
9	10	**11**	12
16	15	14	13

$\Sigma\ z_4=38$

1	2	3	4
8	7	6	**5**
9	**10**	11	12
16	15	**14**	13

1	**2**	3	4
8	7	**6**	5
9	10	11	12
16	15	14	**13**

1	**2**	3	4
8	7	6	**5**
9	10	11	12
16	15	**14**	13

1	2	3	4
8	7	**6**	5
9	**10**	11	12
16	15	14	**13**

$\Sigma\ a_4=30$

Pour n = 5 : 12 solutions pour $\Sigma\ z_5$ ainsi que pour $\Sigma\ a_5$

1	2	3	4	5
10	9	8	**7**	6
11	**12**	13	14	15
20	19	18	17	**16**
21	22	**23**	24	25

1	2	3	4	5
10	9	8	7	**6**
11	**12**	13	14	15
20	19	18	**17**	16
21	22	**23**	24	25

1	2	3	4	5
10	9	8	**7**	6
11	12	**13**	14	15
20	19	18	17	**16**
21	**22**	23	24	25

$\Sigma\ a_5=59$

1	**2**	3	4	5
10	9	8	**7**	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	**16**
21	22	**23**	24	25

1	**2**	3	4	5
10	9	8	7	**6**
11	12	13	14	15
20	19	18	**17**	16
21	22	**23**	24	25

1	2	**3**	4	5
10	9	8	**7**	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	**16**
21	**22**	23	24	25

$\Sigma\ a_5=59$

1	**2**	3	4	5
10	9	8	**7**	6
11	12	**13**	14	15
20	19	18	17	**16**
21	22	23	24	25

1	**2**	3	4	5
10	9	8	7	**6**
11	12	**13**	14	15
20	19	18	**17**	16
21	22	23	24	25

1	2	**3**	4	5
10	9	8	**7**	6
11	**12**	13	14	15
20	19	18	17	**16**
21	22	23	24	25

$\Sigma\ a_5=59$

1	2	3	4	5
10	9	8	7	**6**
11	12	**13**	14	15
20	19	18	**17**	16
21	**22**	23	24	25

1	2	**3**	4	5
10	9	8	7	**6**
11	12	13	14	15
20	19	18	**17**	16
21	**22**	23	24	25

1	2	**3**	4	5
10	9	8	7	**6**
11	**12**	13	14	15
20	19	18	**17**	16
21	22	23	24	25

$\Sigma\, a_5=59$

1	2	**3**	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	**14**	15
20	**19**	18	17	16
21	22	23	24	**25**

1	2	**3**	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	**15**
20	**19**	18	17	16
21	22	23	**24**	25

1	2	3	**4**	5
10	9	8	7	6
11	12	**13**	14	15
20	**19**	18	17	16
21	22	23	24	**25**

$\Sigma\, z_5=71$

1	2	3	**4**	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	**15**
20	**19**	18	17	16
21	22	**23**	24	25

1	2	3	4	**5**
10	9	8	7	6
11	12	13	**14**	15
20	**19**	18	17	16
21	22	**23**	24	25

1	2	**3**	4	5
10	**9**	8	7	6
11	12	13	**14**	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	**25**

$\Sigma\, z_5=71$

1	2	3	**4**	5
10	**9**	8	7	6
11	12	**13**	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	**25**

1	2	3	4	**5**
10	**9**	8	7	6
11	12	**13**	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	**24**	25

1	2	3	4	**5**
10	**9**	8	7	6
11	12	13	**14**	15
20	19	18	17	16
21	22	**23**	24	25

$\Sigma\, z_5=71$

1	2	3	4	**5**
10	9	8	7	6
11	12	**13**	14	15
20	**19**	18	17	16
21	22	23	**24**	25

1	2	**3**	4	5
10	**9**	8	7	6
11	12	13	14	**15**
20	19	18	17	16
21	22	23	**24**	25

1	2	3	**4**	5
10	**9**	8	7	6
11	12	13	14	**15**
20	19	18	17	16
21	22	**23**	24	25

$\Sigma\, z_5=71$

5.6. Calcul du nombre de termes de la suite Σ.

On connaît maintenant le premier et le dernier terme de la suite Z, de raison r = 2, en fonction de n pair ou impair.

De la relation établie précédemment $z = \frac{\Sigma z - \Sigma a + r}{r}$, on tire, avec r = 2 :

$$z_{\text{n pair}} = \frac{2n^2 + 8}{8} \quad \text{et } z_{\text{n impair}} = \frac{2n^2 + 6}{8}$$

Voici quelques valeurs de z_n, nombre de termes de la suite Σ :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
z_n	3	5	7	10	13	17	21	26	31	37	43	50

Remarques.

. On observe que la somme des termes équidistants des extrémités de la suite Σ est constante : c'est d'ailleurs une propriété commune à toutes les progressions arithmétiques.

. Le terme central réel (suite impaire) ou virtuel (suite paire) de cette suite Σ, est égal à la constante magique du carré magique normal de même ordre n que le carré naturel alterné.

. D'où il résulte que les termes extrêmes Σ a et Σ z sont complémentaires à $(n^2 + 1)$. Il en résulte que : $\Sigma a + \Sigma z = n(n^2 + 1)$

5.7. Les suites Σ

Voici donc quelques unes de ces suites Σ :

n = 3 - 3 termes Σ	13	15	17	r = 2
Nombre de Σ identiques	2	2	2	Total : 6

n = 4 - 5 termes Σ	30	32	34	36	38	r = 2
Nbre de Σ identiques	4	4	8	4	4	Total : 24

n = 5 – 7 termes Σ	59	61	63	65	67	69	71	r = 2
Nbre de Σ identiques	12	12	24	24	24	12	12	Total :120

n = 6 – 10 term. Σ	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	r = 2
Nbre de Σ identiques	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	Tot.:720

n = 7 – 13 termes Σ	163	165	…	175	…	185	187	r = 2
Nbre de Σ identiques	?	?	…	?	…	?	?	Total : 5040

n = 8 – 17 termes Σ	244	246	…	260	…	274	276	r = 2
Nbre de Σ identiques	?	?	…	?	…	?	?	Total : 40.320

n = 9 – 21 termes Σ	349	351	….	369	….	387	389	r = 2
Nbre de Σ identiques	?	?	….	?	….	?	?	Total : 302.880

Pour tenter de remplir les tableaux ci-dessus, on est confronté au problème suivant : ètant donné un carré naturel alterné d'ordre n, combien y a-t-il de permutations figurées dont la somme des termes est égale à un nombre donné ?

Ce « nombre donné » étant l'un des termes de la suite Σ.

On connaît la réponse pour n = 3, n = 4 et n = 5 (solutions triviales)

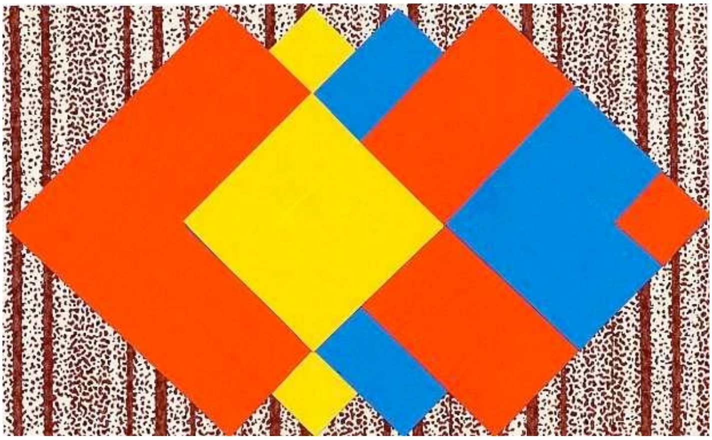
Nota. On serait tenté, au vu de la structure de la série des nombres identiques Σ pour n = 4 et n = 5, d'adopter une structure analogue, de la forme

a + a + 2a + 2a +…………+ 2a + 2a + a + a = Total des permutations possibles.

Connaissant le nombre total de permutations possibles, et le nombres de termes de la série, on trouverait facilement a, nombre entier.

Cela marche pour n = 6 (a = 45), et n = 8 (a = 1344), mais cela ne marche pas pour n = 7, ni pour n = 9. Ce serait trop beau !

Cela dit la recherche manuelle ou triviale, dans le cas des extrêmes de la suite Σ par exemple, dont on sait calculer et construire une solution, reste fastidieuse dès n > 5. Par le calcul, la question semble ouverte, hors un programme informatique ad hoc.



Confusion de carrés sur tapisserie, 1999, composition de l'auteur

6. Le carré naturel dans le « Faust » de Goethe.

Dans le premier « Faust » de Goethe (L'antre de la sorcière), les incantations que déclame la sorcière quant à la constitution d'un certain « carré magique », apparaissent incohérentes et farfelues à première vue!

Mais lorsque l'on a sous les yeux le carré naturel normal d'ordre n = 3, tout devient clair, ou pour le moins compréhensible.

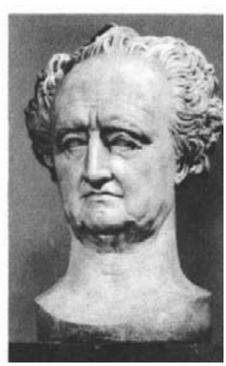
Voici donc le texte en cause de la sorcière, réduit cependant à neuf vers tétrasyllabique, car le reste du monologue est sans valeur en ce qui concerne notre problème et n'est que du « remplissage ».

On trouvera en regard du texte original, une traduction littérale, avec quelques compléments indispensables à une bonne compréhension du texte, dus au Général Cazalas :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1+9	2	3
	7	8
5	6	4

Ans Eins mach' Rehn,	De une fois dix *(en ajoutant neuf)*
Und Zwei lass geh'n, Und Drei mach' gleich.	Laisse passer deux, Et également trois.
Verlier die Vier !	Perds le quatre *(rejeté à la fin)*
Auss Fünf und Sechs	De cinq et six
Mach' Sieben und Acht.	Fais sept et huit *(et vice versa)*
Und Neun ist Eins,	Et neuf est *(avec)* un
Und Zehn ist kein	Et il n'y a plus de dix



Buste de Goethe, par David d'Angers

On obtient un « carré magique à trou » imparfait de constante linéaire égale à 15, excepté sur la première diagonale principale. Il faut dire que les explications de la sorcière sont quelque peu difficiles à comprendre sans l'auxiliaire du carré naturel constamment sous les yeux (Voir Général Cazalas, *Carrés magiques au degré n*, Hermann Editeur, 1934).

7. Le carré naturel comme « carré réversible »

La notion de « carré réversible » a été mise au point par Kathleen Ollerenshaw et David Brée, dans le cadre de la construction des carrés hypermagiques. Le carré naturel N est un bon exemple de carré réversible. Nous allons raisonner sur le carré naturel d'ordre n = 4.

Tout « carré réversible » présente les caractéristiques suivantes.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

A. Dans chaque ligne, colonne et diagonale principale, les sommes de deux termes équidistants des extrémités desdites lignes, colonne et diagonale principale, sont égales.

On le constate bien dans la grille du carré naturel ci-dessus.
Si l'on aligne la suite naturelle des entiers de 1 à 16 :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

On retrouve propriété constatée sur les diagonales principales.

B. Dans toute fenêtre carrée ou rectangulaire, les sommes des deux termes situés dans les angles opposés, sont égales.

Si l'on superpose les deux moitiés de la série « 1 – 16 » :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

On retrouve la propriété énoncée pour les fenêtres rectangulaires, en croisant les termes des lignes supérieure et inférieure deux à deux.

Cette propriété nous incite à redistribuer les termes du carré naturel comme indiqué ci-contre : Ces deux grilles numériques possèdent les caractéristiques du « carré récersible »

1	2	9	10
3	4	11	12
5	6	13	14
7	8	15	16

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

Il y a de nombreuses grilles numériques réalisées avec la série normale des entiers de 1 à 16 du carré naturel, qui possèdent les caractéristiques du « carré réversible », sans d'ailleurs être magiques.

Voici une planche de carrés réversibles normaux d'ordre n = 4 ; les manipulations sur le carré naturel N apparaissent clairement :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
9	10	11	12
5	6	7	8
13	14	15	16

5	6	7	8
1	2	3	4
13	14	15	16
9	10	11	12

5	6	7	8
13	14	15	16
1	2	3	4
9	10	11	12

1	3	2	4
5	7	6	8
9	11	10	12
13	15	14	16

1	3	2	4
9	11	10	12
5	7	6	8
13	15	14	16

5	7	6	8
1	3	2	4
13	15	14	16
9	11	10	12

5	7	6	8
13	15	14	16
1	3	2	4
9	11	10	12

2	1	4	3
6	5	8	7
10	9	12	11
14	13	16	15

2	1	4	3
10	9	12	11
6	5	8	7
14	13	16	15

6	5	8	7
2	1	4	3
14	13	16	15
10	9	12	11

6	5	8	7
14	13	16	15
2	1	4	3
10	9	12	11

2	4	1	3
6	8	5	7
10	12	9	11
14	16	13	15

2	4	1	3
10	12	9	11
6	8	5	7
14	16	13	15

6	8	5	7
2	4	1	3
14	16	13	15
10	12	9	11

6	8	5	7
14	16	13	15
2	4	1	3
10	12	9	11

On observe en outre, que les diagonales sont magiques, de somme linéaire $M_4 = 34$, et que la somme des nombres complémentaires est constante, et égale à ½ M_4=17.

Il existe des carrés réversibles pour tous les ordres pairs.

Exemples pour n = 8, calqués, *mutatis mutandis*, sur les carrés réversibles d'ordre n = 4

1	2	3	4	33	24	25	26
5	6	7	8	37	38	39	40
9	10	11	12	41	42	43	44
13	14	15	16	45	46	47	48
17	18	19	20	49	50	51	52
21	22	23	24	53	54	55	56
25	26	27	28	57	58	59	60
29	30	31	32	61	62	63	64

1	2	3	4	17	18	19	20
5	6	7	8	21	22	23	24
9	10	11	12	23	26	27	28
13	14	15	16	29	30	31	32
33	34	35	36	49	50	51	52
37	38	39	40	53	54	55	56
41	42	43	44	57	58	59	60
45	46	47	48	61	62	63	64

Pour obtenir les carrés réversibles d'ordre n = 8 suivants, on subdivise la grille du carré naturel de 64 cases, en 16 petits « quartiers » de 4 cases au carré, que l'on fait correspondre aux 16 cases homologues des carrés réversibles d'ordre n = 4 de la planche qui précède, et on effectue les transferts :

19	20	23	24	17	18	21	22
27	28	31	32	25	26	29	30
51	52	55	56	49	50	53	54
59	60	63	64	57	58	61	62
3	4	7	8	1	2	5	6
11	12	15	16	9	10	13	14
35	36	39	40	33	34	37	38
43	44	47	48	41	42	45	46

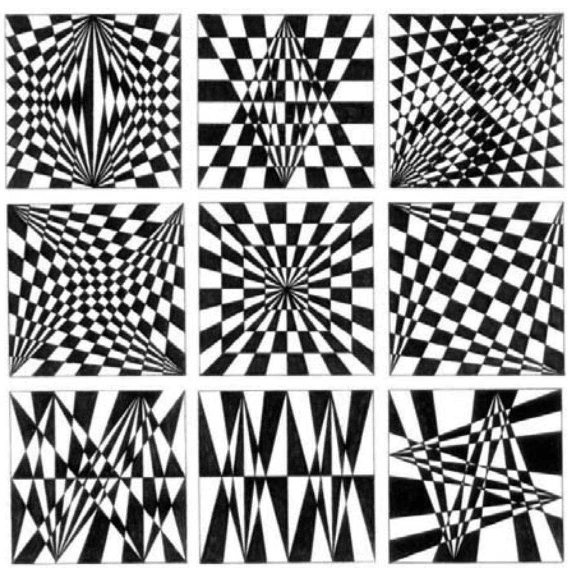
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

On verra plus loin que le « carré réversible » d'ordre n = 4k, et donc le carré naturel normal d'ordre n = 4, sous ses quatre formes, ou « trafiqué » comme ci-dessus, est à la base d'une construction des carrés hypermagiques d'ordre n = 4.

Bibliographie spécifique.

▪ René Descombes, *Les Carrés magiques* et *La Magie du Carré*, *op. cit.*

▪ Kathleen Ollerenshaw & David Brée, *Most-perfect pandiagonal magic squares, Their construction and enumeration*n, The Institute of Mathematics and its Applications, Southend-on-Sea, Essex, 1998.



Assemblage de Hannes Bürgel –Dresden - 2008

8. Une application du carré naturel : le Crible d'Eratosthène.

8.1. Présentation

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le crible d'Eratosthène (276-194 avant J.C.), permet, sur le carré naturel d'ordre n, de déterminer les nombres premiers depuis l'unité jusqu'à n^2.

Considérons le carré naturel d'ordre n = 10, comportant les nombres depuis 1 jusqu'à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On va occulter ou pocher successivement les nombres de la grille du carré naturel qui ne sont pas premiers.

Application pour n = 10, soit pour les nombres de 1 à 100.
. On poche 1 qui est considéré comme n'étant pas premier.
. 2 et 3 sont premiers. On poche tous les multiples de 2 et 3, lesquels ne sont pas des nombres premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

. 5 est premier ; on poche tous les multiples de 5.
. 7, non poché, est premier. On poche tous les multiples de 7.
. 11, non poché, est premier. On poche tous les multiples de 11. On s'arrête là, car 11 est plus grand que $\sqrt{n^2} = \sqrt{100} = 10$
. Tous les nombres non pochés de la grille sont des nombres premiers.

Le Crible d'Erathostène est astucieux, mais pour les grands nombres premiers, la méthode est impraticable, même avec un puissant calculateur.

Le plus grand nombre premier connu à ce jour (février 2006) est un nombre de Mersenne, le 43ème, de la forme $2^n - 1$. Il a été calculé en 2005 par Cooper & Boone, membres du GIMPS : il vaut $2^{30\,402\,457}-1$ et compte 9 152 052 chiffres.

Rappelons que pour trouver le nombre de chiffres N d'une puissance de 2, on fait le produit de l'exposant par log 2 = 0,301 029 995, et l'on prend le nombre entier immédiatement supérieur au résultat obtenu.

Exemple pour le 43 ème nombre de Mersenne :

$N = 30\ 402\ 457 \times 0,301\ 029\ 995 = 9\ 152\ 051{,}479$; soit N = 9 152 052 chiffres.

On compte, paraît-il, 75 000 mathématiciens du monde entier, groupés au sein du « Great Internet Mersenne Prime Search » (GIMPS), qui recherchent « le plus grand nombre premier » !

La Société américaine « Electronic Frontier Foundation » offre 100 000 Dollar au premier mathématicien qui trouvera un nombre premier de plus de dix millions de chiffres. Cela ne saurait tarder !

Eratosthène, mathématicien, géographe, philo-sophe, astronome grec est né à Cyrène, et mort à Alexandrie. Il fut précepteur des enfants du roi Ptolémée III Evergète et de Bérénice, Lagos – le futur Ptolémée IV Philopator –, Arsinoé et Magas, et directeur de la première et célèbre « Grande Bibliothèque » d'Alexandrie, incendiée en 48 av. J.C. après l'entrée de César dans la ville.

On lui doit un instrument de calcul, le mesolabe ou mesographe, pour résoudre le problème de la moyenne proportionnelle, et la duplication du cube.

Eratosthène

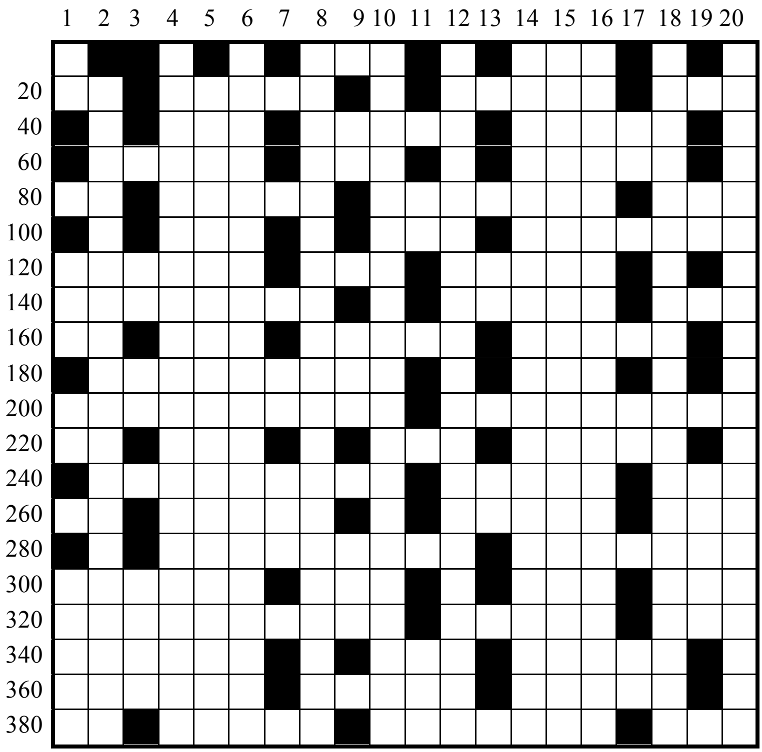
Eratosthène est resté célèbre pour avoir, le premier, entrepris la « mesure de la Terre ». Sur le méridien passant par Alexandrie et Syène, il mesura la distance séparant ces deux villes, soit 5 000 stades (1 stade = 157,50 m).

Déterminant alors l'angle au centre de la terre correspondant à cet arc de méridien, grâce à une observation de l'ombre du soleil, soit 1/50 ème de la circonférence totale de 360°, il calcula facilement la longueur totale de la circonférence de la Terre, soit 250 000 stades, très proche des 40 000 km que nous connaissons par des mesures plus précises. Et ce qui est remarquable, c'est que cette mesure de la circonférence de la Terre, en stades, est un carré parfait : $250\ 000 = (500)^2$. La surface de la Terre est alors de 20 milliards de stades carrés.

Eratosthène est le héros du livre de Denis Guedj (*Les cheveux de Bérénice*, Editions du Seuil, 2003) qui raconte précisément l'expédition d'Eratosthène, commanditée par Ptolémée IV Philopator, pour l'opération « Mesure de la Terre », le long du Nil, entre Alexandrie et Syène, en Egypte.

8.2. Une grille visuelle pour le Crible d'Eratosthène

Dans une grille carrée d'ordre n = 20, dont les cases sont numérotées de 1 à 400, on poche cette fois les nombres premiers. Toutes les colonnes de numéro pair restent vides, à l'exception de la seconde colonne qui contient le nombre 2, nombre pair mais premier. Deux trouées correspondant à l'élimination des multiples de 5, colonnes flanquées de deux colonnes de nombres pairs, sont bien visibles ; ces 3 colonnes successives se retrouvent de dix en dix, si l'on extrapole la grille, de même que les colonnes paires, une colonne sur deux. Le reste du tableau semble bien désordonné.



(Trouée) **(Trouée)**

9. A propos des nombres premiers.

9.1. Une curiosité : la Table senaire des nombres premiers.

« En parcourant une table des nombres premiers, on ressent une impression de hasard. Il n'en est pourtant rien, comme le suggère le rattachement aux multiples de six, plus ou moins un » (Lucien Gérardin, *Le mystère des nombres*, Culture, Arts, Loisirs, 1975, pp. 106 - 124)

(5 *a* + 1) x 6 ± 1		(5 *a* + 2) x 6 ±1		(5 *a* + 3) x 6 ± 1		(5 *a* + 4) x 6 ± 1		(5 *a* + 5) x 6 ± 1	
5	7	11	13	17	19	23		29	31
	37	41	43	47		53		59	61
	67	71	73		79	83		89	
	97	101	103	107	109	113			
	127	131		137	139			149	151
	157		163	167		173		179	181
		191	193	197	199				211
			223	227	229	233		239	241
		251		257		263		269	271
	277	281	283			293			
	307	311	313	317					331
	337			347	349	353		359	
	367		373		379	383		389	
	397	401			409			419	421
		431	433		439	443		449	
	457	461	463	467				479	
Multiples de 5	487	491			499	503	Multiples de 5	509	
		521	523						541
	547			557		563		569	571
	577			587		593		599	601
	607		613	617	619				631
		641	643	647		653		659	661
			673	677		683			691
		701			709			719	
	727		733		739	743			751
	757	761			769	773			
	787			797				809	811
		821	823	827	829			839	
			853	857	859	863			
	877	881	883	887					
	907	911			919			929	
	937	941		947		953			
	967	971		977		983			991
	997				1009		1013	1019	1021

Les nombres premiers répartis dans la table « senaire » ci-dessus, montrent, sur les nombres premiers jusqu'à 1021, leur appartenance aux multiples de six plus ou moins un, dans les relations qui figurent en tête des colonnes (on trouve facilement n) . Un classement remarquable. Peut-on extrapoler cette table senaire ?

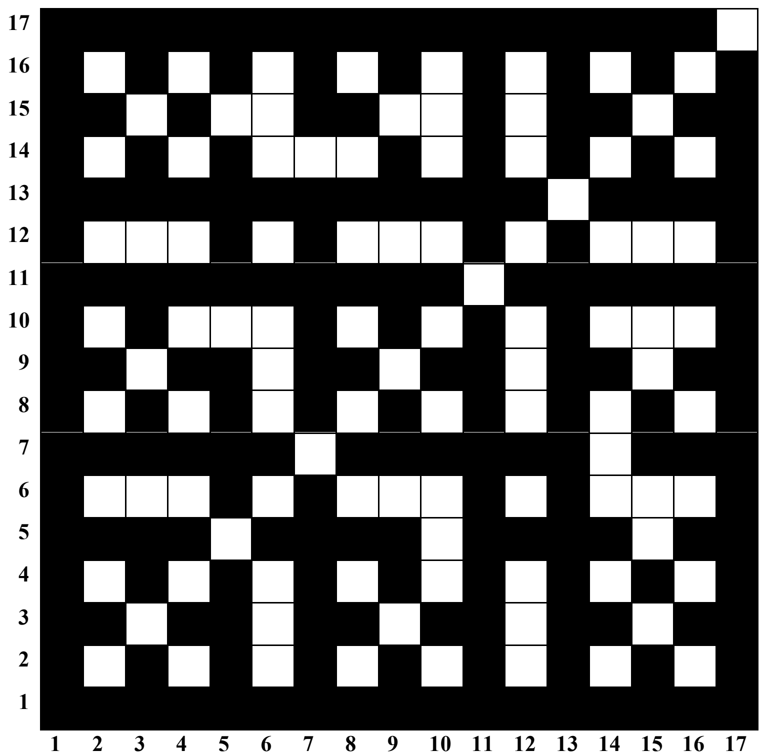
Tout nombre premier (sauf 2 et 3) est de la firme 6 k + 1 (k entier). En effet tout entier est de la forme 6 k + r (k et r entiers), où r est le reste de la division par 6 (0 = r − 5) et il est divisible par 2 ou 3 si 2 ≥ r − 4.

9.2. Une table des couples de nombres premiers entre eux.

Rappelons que sont premiers entre eux, deux nombres a et b qui n'ont aucun diviseur commun, mis à part l'unité, c'est-à-dire dont le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) est 1. Dans la grille carrée affectée de coordonnées numériques classiques, on poche les cases dont les coordonnées a et b sont des nombres premiers entre eux.

Voici un exemple dans une grille carrée d'ordre n = 17 : « Au vu de la répartition apparemment aléatoire des nombres premiers, on s'attend à ce que la répartition des couples de nombres premiers entre eux ait une apparence tout aussi désordonnée » (Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Pour la Science Editeur, 2000, pp. 50-51)

On constate, outre une symétrie par rapport à la seconde diagonale, une « certaine ordonnance » dans la répartition des cases pochées.



Une construction simple de la grille pochée.

On peut calculer successivement le PGCD de tous les couples. Même en tenant compte de la symétrie diagonale, ce sont là des opérations longues et fastidieuses. Voici, initiée par P. Goetgheluck et présentée par Jean-Paul Delahaye, une méthode de construction, exploitant quelques propriétés simples, permettant de construire cette grille pochée sans jamais calculer un PGCD !

« Puisque PGCD (1,b) = PGCD (a, 1) = 1 (tout nombre entier est premier avec l'unité), on poche toute la droite horizontale d'équation a = 1, et toute la droite verticale d'équation b = 1. Sachant que PGCD (a, a) = a (un nombre n'est pas premier avec lui-même), on laisse en blanc toute la diagonale d'équation a = b. La relation PGCD (a, b) = PGCD (a+b, b) , (a et b ont un diviseur commun si, et seulement si, a augmenté de b a un diviseur commun avec b) signifie que la droite horizontale d'équation b = b, est périodique de période b_0. Par conséquent, si l'on connaît b_0 points consécutifs de cette droite, on peut la dessiner aussi loin que l'on veut. Complétons ainsi la droite b = 2,dont on connaît déjà les deux premiers points : noir, blanc. La symétrie de la relation « plus grand commun diviseur » [PGCD (a, b) = PGCD (b, a)] a pour conséquence que le dessin est symétrique par rapport à la droite d'équation b = a. On peut donc dessiner la droite a = 2. Grâce aux opérations précédentes, on connaît à présent les trois premiers points de la droite b = 3 (noir, blanc, blanc). Comme elle est périodique de période 3, on peut la pocher entièrement. Et ainsi de suite… »

On remarque également que les cases pochées correspondant à deux nombres consécutifs, toujours premiers entre eux, longent de part et d'autre la diagonale d'équation a = b (seconde diagonale), ce qui permet de pocher toutes les cases correspondantes.

Densité des couples de nombres premiers entre eux

Le nombre de couples N que l'on peut former peut se calculer à partir des combinaisons de m termes pris p à p, avec dans notre cas, m = 17 et p = 2 . Rappelons cette relation, sans doublets :

$$C_m^p = \frac{m(m = 1)(m = 2)....(m = p + 1)}{p!}$$

Il faut doubler ce nombre pour tenir compte des couples (a, b) et (b, a), et ajouter les doublets (m = 17).

Soit $N = 2\,C_{17}^{2} + 17 = 2\,(136) + 17 = 289$

Ce qui correspond, heureusement, au nombre de cases de la grille d'ordre n = 17 : $17^2 = 289$!

Or on compte 189 cases pochées dans la grille d'ordre n = 17 de notre exemple.

La densité D des cases pochées est ainsi $D = \frac{189}{289} = 0{,}65$. Ce que confirme sensiblement la formule donnant la densité des cases pochées *à l'infini*, soit

$$D = \frac{6}{\Pi^2} = 0{,}61$$

Bien sûr, rien n'empêche de dresser une table des couples de nombres premiers entre eux dans une grille rectangulaire.

9.3. La spirale carrée de Stanislas Ulam : une diagonale de nombres premiers !

Dans la spirale logée dans la grille carrée ci-dessous, de côté N = 12, de première case 41, certains nombres premiers pochés de cette suite naturelle des entiers depuis 41, font apparaître une belle diagonale.

On peut prolonger cette spirale dans une grille de côté N = 40 : cette diagonale de nombres premiers persiste.

Cette spirale a été trouvée par le mathématicien américain d'origine polonaise Stanislas Ulam, de Los Alamos, en 1963.

Stanislas Ulam
(1900 - 1984)

184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	172
142	105	104	103	102	101	100	99	98	97	130	171
143	106	77	76	75	74	73	72	71	96	129	170
144	107	78	57	56	55	54	53	70	95	128	169
145	108	79	58	45	44	43	52	69	94	127	168
146	109	80	59	46	41	42	51	68	93	126	167
147	110	81	60	47	48	49	50	67	92	125	166
148	111	82	61	62	63	64	65	66	91	124	165
149	112	83	84	85	86	87	88	89	90	123	164
150	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	163
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162

Les nombres premiers P_n situés sur cette diagonale répondent à la relation :

$P_n = n^2 + n + 41$, avec $0 \geq n \leq 39$.Le côté N de la grille correspondante est $N = n + 1$.

Cette relation avait déjà été proposée par Leonhard Euler.

Les nombres premiers en cause vont de 41 (pour $n = 0$) à 1571 (pour $n = 39$)

La relation d'Euler/Ulam, pour $39<n \geq 107$, donne encore des nombres premiers pratiquement une fois sur deux (le pourcentage exact est 47,5 %). Stanislas Ulam a découvert deux autres relations donnant des nombres premiers avec un « bon rendement » :

. $P_n = 4\ n^2 + 170\ n + 1847$, relation qui fournit 760 nombres premiers, différents de ceux donnés par la relation d'Euler/Ulam ci-dessus. (pourcentage 46,6 %)

. $P_n = 4\ n^2 + 4\ n + 59$, relation qui donne 1500 nombres premiers, différents de ceux donnés par les deux relations précédentes (pourcentage 43,7 %)

Stanislas Ulam est par ailleurs « l'inventeur » des « nombres chanceux d'Ulam », à ne pas confondre avec les « nombres chanceux d'Euler » ! Les dix plus petits nombres chanceux d'Ulam, tous impairs, sont 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37. On conjecture que tout nombre pair plus grand que 10, est la somme de deux nombres chanceux d'Ulam. (cf. François Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Hermann Editeur, 1994, p. 144)

Bibliographie spécifique.

- Francis Casiro, *Une formule pour les nombres premiers ?, Tangente,* H.S. N°6, 1998, pp. 18-21.
- Marie-José Pestel, *2500 ans de grands et petits problèmes, Tangente ,* mars-avril 2002, pp. 8-10.
- François Jaboeuf, *Les nombres premiers*, Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques, IREM-ellipses 1993, pp. 35-383.
- Philippe Paclet, *La magie des nombres* , « Jeux et Stratégie », n° 17, 1982, pp. 48-50.

Les 120 permutations figurées du carré naturel alterné d'ordre n=5

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

1 + 9 + 13 + 17 + 25 = 65
1 + 9 + 13 + 24 + 16 = 63
1 + 9 + 23 + 14 + 16 = 63
1 + 9 + 23 + 17 + 15 = 65
1 + 9 + 18 + 14 + 25 = 67
1 + 9 + 18 + 24 + 15 = 67

1 + 12 + 8 + 17 + 25 = 63
1 + 12 + 8 + 24 + 16 = 61
1 + 12 + 18 + 7 + 25 = 63
1 + 12 + 18 + 24 + 6 = 61
1 + 12 + 23 + 7 + 16 = 59
1 + 12 + 23 + 17 + 6 = 59

1 + 19 + 8 + 14 + 25 = 67
1 + 19 + 8 + 24 + 15 = 67
1 + 19 + 13 + 7 + 25 = 65
1 + 19 + 13 + 24 + 6 = 63
1 + 19 + 23 + 7 + 15 = 65
1 + 19 + 23 + 14 + 6 = 63

1 + 22 + 8 + 14 + 16 = 61
1 + 22 + 8 + 17 + 15 = 63
1 + 22 + 13 + 7 + 16 = 59
1 + 22 + 13 + 17 + 6 = 59
1 + 22 + 18 + 7 + 15 = 63
1 + 22 + 18 + 14 + 6 = 61

10 + 2 + 13 + 17 + 25 = 67
10 + 2 + 13 + 24 + 16 = 65
10 + 2 + 23 + 14 + 16 = 65
10 + 2 + 23 + 17 + 15 = 67
10 + 2 + 18 + 14 + 25 = 69
10 + 2 + 18 + 24 + 15 = 69

10 + 12 + 3 + 17 + 25 = 67
10 + 12 + 3 + 24 + 16 = 65
10 + 12 + 18 + 4 + 25 = 69
10 + 12 + 18 + 24 + 5 = 69
10 + 12 + 23 + 4 + 16 = 65
10 + 12 + 23 + 17 + 5 = 67

10 + 19 + 3 + 14 + 25 = 71
10 + 19 + 3 + 24 + 15 = 71
10 + 19 + 13 + 4 + 25 = 71
10 + 19 + 13 + 24 + 5 = 71
10 + 19 + 23 + 4 + 15 = 71
10 + 19 + 23 + 14 + 5 = 71

10 + 22 + 3 + 14 + 16 = 65
10 + 22 + 3 + 17 + 15 = 67
10 + 22 + 13 + 4 + 16 = 65
10 + 22 + 13 + 17 + 5 = 67
10 + 22 + 18 + 4 + 15 = 69
10 + 22 + 18 + 14 + 5 = 69

11 + 2 + 8 + 17 + 25 = 63
11 + 2 + 8 + 24 + 16 = 61
11 + 2 + 18 + 7 + 25 = 63
11+ 2 + 18 + 24 + 6 = 61
11 + 2 + 23 + 7 + 16 = 59
11 + 2 + 23 + 17 + 6 = 59

11 + 9 + 3 + 17 + 25 = 65
11 + 9 + 3 + 24 + 16 = 63
11 + 9 + 18 + 4 + 25 = 67
11 + 9 + 18 + 24 + 5 = 67
11 + 9 + 23 + 4 + 16 = 63
11 + 9 + 23 + 17 + 5 = 65

11 + 19 + 3 + 7 + 25 = 65
11 + 19 + 3 + 24 + 6 = 63
11 + 19 + 8 + 4 + 25 = 67
11 + 19 + 8 + 24 + 5 = 67
11 + 19 + 23 + 4 + 6 = 63
11 + 19 + 23 + 7 + 5 = 65

11 + 22 + 3 + 7 + 16 = 59
11 + 22 + 3 + 17 + 6 = 59
11 + 22 + 18 + 4 + 6 = 61
11 + 22 + 18 + 7 + 5 = 63
11 + 22 + 8 + 4 + 16 = 61
11 + 22 + 8 + 17 + 5 = 63

20 + 2 + 8 + 14 + 25 = 69
20 + 2 + 8 + 24 + 15 = 69
20 + 2 + 13 + 7 + 25 = 67
20 + 2 + 13 + 24 + 6 = 65
20 + 2 + 23 + 7 + 15 = 67
20 + 2 + 23 + 14 + 6 = 65

20 + 9 + 3 + 14 + 25 = 71
20 + 9 + 3 + 24 + 15 = 71
20 + 9 + 13 + 4 + 25 = 71
20 + 9 + 13 + 24 + 5 = 71
20 + 9 + 23 + 4 + 15 = 71
20 + 9 + 23 + 14 + 5 = 71

20 + 12 + 3 + 7 + 25 = 67
20 + 12 + 3 + 24 + 6 = 65
20 + 12 + 8 + 4 + 25 = 69
20 + 12 + 8 + 24 + 5 = 69
20 + 12 + 23 + 4 + 6 = 65
20 + 12 + 23 + 7 + 5 = 67

20 + 22 + 3 + 7 + 15 = 67
20 + 22 + 3 + 14 + 6 = 65
20 + 22 + 13 + 4 + 6 = 65
20 + 22 + 13 + 7 + 5 = 67
20 + 22 + 8 + 4 + 15 = 69
20 + 22 + 8 + 14 + 5 = 69

21 + 2 + 8 + 14 + 16 = 61
21 + 2 + 8 + 17 + 15 = 63
21 + 2 + 13 + 7 + 16 = 59
21 + 2 + 13 + 17 + 6 = 59
21 + 2 + 18 + 7 + 15 = 63
21 + 2 + 18 + 14 + 6 = 61

21 + 9 + 3 + 14 + 16 = 63
21 + 9 + 3 + 17 + 15 = 65
21 + 9 + 13 + 4 + 16 = 63
21 + 9 + 13 + 17 + 5 = 65
21 + 9 + 18 + 4 + 15 = 67
21 + 9 + 18 + 14 + 5 = 67

21 + 12 + 3 + 7 + 16 = 59
21 + 12 + 3 + 17 + 6 = 59
21 + 12 + 18 + 4 + 6 = 61
21 + 12 + 18 + 7 + 5 = 63
21 + 12 + 8 + 4 + 16 = 61
21 + 12 + 8 + 17 + 5 = 63

21 + 19 + 3 + 7 + 15 = 65
21 + 19 + 3 + 14 + 6 = 63
21 + 19 + 13 + 4 + 6 = 63
21 + 19 +13 + 7 + 5 = 65
21 + 19 + 8 + 4 + 15 = 67
21 + 19 + 8 + 14 + 5 = 67

10. Le carré naturel considéré comme une matrice

On se propose de tester, de façon élémentaire, le comportement du carré naturel considéré comme une matrice, essentiellement dans l'addition et la multiplication. Cette notion ne mène d'ailleurs pas très loin.

Rappelons que les opérations sur les matrices ont été étudiées et définies en particulier par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821 – 1895).

10.1. L'addition

Soit les quatre formes du carré naturel d'ordre n = 3 :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

I (N)

3	2	1
6	5	4
9	8	7

II (M)

7	8	9
4	5	6
1	2	3

III (NI)

9	8	7
6	5	4
3	2	1

IV (MI)

Considérés comme des matrices, on peut additionner deux à deux ces quatre formes de carré naturel, en additionnant les grilles terme à terme : on obtient six nouvelles matrices.

4	4	4
10	10	10
16	16	16

I + II

8	10	12
8	10	12
8	10	12

I + III

10	10	10
10	10	10
10	10	10

I + IV

10	10	10
10	10	10
10	10	10

II + III

12	10	8
12	10	8
12	10	8

II + IV

16	16	16
10	10	10
4	4	4

III + IV

Ces grilles sont constituées de lignes ou de colonnes toutes identiques, et ne sont pas très diversifiées.

Avec le carré naturel d'ordre n = 4, on obtient des résultats identiques.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

I (N)

4	3	2	1
8	7	6	5
13	11	10	9
16	15	14	13

II (M)

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

III (NI)

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

IV (MI)

5	5	5	5
13	13	13	13
21	21	21	21
29	29	29	29

I + II

14	16	18	20
14	16	18	20
14	16	18	20
14	16	18	20

I + III

17	17	17	17
17	17	17	17
17	17	17	17
17	17	17	17

I + IV

17	17	17	17
17	17	17	17
17	17	17	17
17	17	17	17

II + III

20	18	16	14
20	18	16	14
20	18	16	14
20	18	16	14

II + IV

29	29	29	29
21	21	21	21
13	13	13	13
5	5	5	5

III + IV

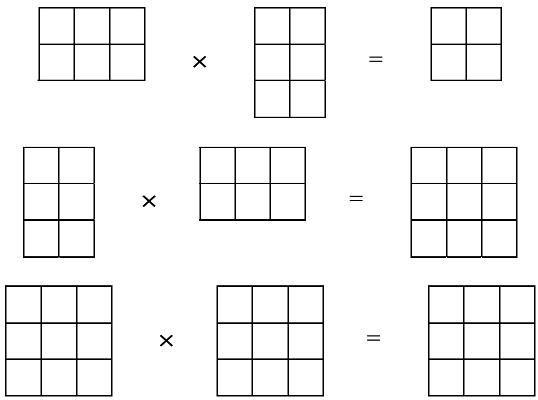
10.2. Le produit

Le produit de deux matrices n'est possible que si le nombre de lignes de la première matrice est égal au nombre de colonnes de la seconde, et que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice.

Dans ces conditions, le nombre de lignes du produit de ces deux matrices, est égal à celui de la première matrice, et le nombre de colonnes est égal à celui de la seconde matrice.

Ces définitions s'appliquent aux matrices carrées.

Exemples :



Le produit des matrices n'est pas commutatif.

On peut multiplier deux carrés naturels de même ordre : le produit de deux carrés naturels d'ordre différent n'est pas possible.

Exemples de produits matriciels.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline E & F \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline aA + bC + cE & aB + bD + cF \\ \hline dA + eC + fE & dB + eD + fF \\ \hline \end{array}$$

Exemple numérique
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 7 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & -2 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline -1 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 6 \\ \hline 23 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline E & F \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline Aa + Bd & Ab + Be & Ac + Bf \\ \hline Ca + Dd & Cb + De & Cc + Df \\ \hline Ea + Fd & Eb + Fe & Ec + Ff \\ \hline \end{array}$$

Exemple numérique
$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & -2 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline -1 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 7 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline -6 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 19 & 25 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Dans l'application du carré naturel comme matrice, seul le produit des matrices carrées nous intéresse.

10.3. Matrices d'ordre n = 2

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline aA + bC & aB + bD \\ \hline cA + dC & cB = dD \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline Aa + Bc & Ab + Bd \\ \hline Ca + Dc & Cb + Dd \\ \hline\end{array}$$

Exemples numériques :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 6 & 6 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 9 & 2 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 24 & 7 \\ \hline 66 & 18 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 9 & 2 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 6 & 6 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 10 \\ \hline 39 & 30 \\ \hline\end{array}$$

10.4. Matrices d'ordre n = 3

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & I \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline aA + bD + cG & aB + bE + cH & aC + bF + cI \\ \hline dA + eD = fG & dB + eE + fH & dC + eF + fI \\ \hline gA + hD + iG & gB + hE + iH & gC + hF + iI \\ \hline\end{array}$$

Exemples numériques :

$$\underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline\end{array}} \times \underset{\text{II (M)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 5 & 4 \\ \hline 9 & 8 & 7 \\ \hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=288 & \Sigma=243 & \Sigma=198 & r=45 \\ \cline{2-4} \Sigma=108 & 42 & 36 & 30 & r=6 \\ \cline{2-4} \Sigma=243 & 96 & 81 & 66 & r=15 \\ \cline{2-4} \Sigma=378 & 150 & 126 & 102 & r=24 \\ \cline{2-4} r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

$$\underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline\end{array}} \times \underset{\text{III (NI))}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=162 & \Sigma=207 & \Sigma=252 & r=45 \\ \cline{2-4} \Sigma=72 & 18 & 24 & 30 & r=6 \\ \cline{2-4} \Sigma=207 & 54 & 69 & 84 & r=15 \\ \cline{2-4} \Sigma=342 & 90 & 114 & 138 & r=24 \\ \cline{2-4} r=135 & r=36 & r=45 & r=54 & \end{array}$$

$$\underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline\end{array}} \times \underset{\text{IV (MI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 9 & 8 & 7 \\ \hline 6 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=252 & \Sigma=207 & \Sigma=162 & r=45 \\ \cline{2-4} \Sigma=72 & 30 & 24 & 18 & r=6 \\ \cline{2-4} \Sigma=207 & 84 & 69 & 54 & r=15 \\ \cline{2-4} \Sigma=342 & 138 & 114 & 90 & r=24 \\ \cline{2-4} r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

$$\underset{\text{II (M)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 5 & 4 \\ \hline 9 & 8 & 7 \\ \hline\end{array}} \times \underset{\text{III (NI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=198 & \Sigma=243 & \Sigma=288 & r=45 \\ \cline{2-4} \Sigma=108 & 30 & 36 & 42 & r=6 \\ \cline{2-4} \Sigma=243 & 66 & 81 & 96 & r=15 \\ \cline{2-4} \Sigma=378 & 102 & 126 & 150 & r=24 \\ \cline{2-4} r=135 & r=36 & r=45 & r=54 & \end{array}$$

$$\underset{\text{II (M)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 6&5&4\\\hline 9&8&7\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{IV (MI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 9&8&7\\\hline 6&5&4\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=288 & \Sigma=243 & \Sigma=198 & r=45\\\hline \Sigma=108 & 42 & 36 & 30 & r=6\\\hline \Sigma=243 & 96 & 81 & 66 & r=15\\\hline \Sigma=378 & 150 & 126 & 102 & r=24\\\hline r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

$$\underset{\text{III (NI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7&8&9\\\hline 4&5&6\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{IV (MI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 9&8&7\\\hline 6&5&4\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=252 & \Sigma=207 & \Sigma=162 & r=45\\\hline \Sigma=342 & 138 & 114 & 90 & r=24\\\hline \Sigma=207 & 84 & 69 & 54 & r=15\\\hline \Sigma=72 & 30 & 24 & 18 & r=6\\\hline r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

Si l'on permute les matrices du produit, on obtient six nouvelles matrices.
Exemples numériques :

$$1\quad \underset{\text{II (M)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 6&5&4\\\hline 9&8&7\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=152 & \Sigma=207 & \Sigma=252 & r=45\\\hline \Sigma=72 & 18 & 24 & 30 & r=6\\\hline \Sigma=207 & 54 & 69 & 84 & r=15\\\hline \Sigma=342 & 81 & 114 & 138 & r=24\\\hline r=135 & r=36 & r=45 & r=54 & \end{array}$$

$$2\quad \underset{\text{III (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7&8&9\\\hline 4&5&6\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=198 & \Sigma=243 & \Sigma=288 & r=45\\\hline \Sigma=378 & 102 & 126 & 150 & r=6\\\hline \Sigma=243 & 66 & 81 & 96 & r=15\\\hline \Sigma=108 & 30 & 36 & 42 & r=24\\\hline =135 & r=36 & r=45 & r=54 & \end{array}$$

$$3\quad \underset{\text{IV (MI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 9&8&7\\\hline 6&5&4\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=162 & \Sigma=207 & \Sigma=252 & r=45\\\hline \Sigma=342 & 90 & 114 & 138 & r=6\\\hline \Sigma=207 & 54 & 69 & 84 & r=15\\\hline \Sigma=108 & 18 & 24 & 30 & r=24\\\hline r=135 & r=36 & r=45 & r=54 & \end{array}$$

$$4\quad \underset{\text{III (NI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7&8&9\\\hline 4&5&6\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{I (N)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 6&5&4\\\hline 9&8&7\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=288 & \Sigma=243 & \Sigma=138 & r=45\\\hline \Sigma=378 & 150 & 126 & 102 & r=6\\\hline \Sigma=243 & 96 & 81 & 66 & r=15\\\hline \Sigma=108 & 42 & 36 & 30 & r=24\\\hline r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

$$5\quad \underset{\text{IV (MI)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 9&8&7\\\hline 6&5&4\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array}} \times \underset{\text{II (M)}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 6&5&4\\\hline 9&8&7\\\hline\end{array}} = \begin{array}{r|c|c|c|l} & \Sigma=252 & \Sigma=207 & \Sigma=162 & r=45\\\hline \Sigma=342 & 138 & 114 & 90 & r=6\\\hline \Sigma=207 & 84 & 69 & 54 & r=15\\\hline \Sigma=72 & 30 & 24 & 18 & r=24\\\hline r=135 & r=54 & r=45 & r=36 & \end{array}$$

6

9	8	7
6	5	4
3	2	1

IV (MI)

×

7	8	9
4	5	6
1	2	3

III (NI)

=

	Σ =198	Σ =243	Σ =288	r=45
Σ =378	102	126	150	r= 6
Σ =243	66	81	96	r=15
Σ =108	30	36	42	r=24
r=135	r=36	r=45	r=54	

Ces matrices, à l'exception de deux d'entre elles qui sont identiques à celle de la première série, s'obtiennent par symétrie ou rotation des matrices de la première série. Les grilles numériques de ces produits ont des caractéristiques communes curieuses:

- les termes des lignes et des colonnes sont en progression arithmétique de mêmes raisons ;
- les raisons des progressions arithmétiques des lignes et des colonnes sont elles-mêmes en progression arithmétique de raison r = 9 ;
- les sommes linéaires des lignes, et les sommes linéaires des colonnes sont également en progression arithmétique de même raison : 45 pour les lignes et 135 pour les colonnes.

On remarque d'ailleurs, que le carré naturel lui-même possède des propriétés analogues. Le produit de deux matrices conserve-t-il toujours les propriétés initiales des matrices que l'on multiple ?

	Σ =12	Σ =15	Σ =18	r=3
Σ =6	1	2	3	r= 1
Σ =15	4	5	6	r=1
Σ =24	7	8	9	r=1
r=9	r=3	r=3	r=3	

10.5. Matrices d'ordre n = 4

a	b	c	d
e	f	g	h
I	j	k	l
m	n	o	p

x

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

=

aA+bE+cI+dM	aB+bF+cJ+dN	aC+bG+cK+dO	aD+bH+cL+dP
eA+fE+gI+hM	eB+fF+gJ+hN	eC+fG+gK+hO	eD+fH+gL+lP
iA+jE+kI+lM	iB+jF+kJ+lN	iC+jG+kK+lO	iD+jH+kL+lP
mA+nE+oI+pM	mB+nF+oJ+pN	mC+nG+oK+pO	mD+nH+oL+pP

Un exemple numérique :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

I (M)

×

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

IV (MI)

=

	∑=1280	∑=1144	∑=1008	∑=872	r=136
∑=260	80	70	60	50	r=10
∑=804	240	214	188	162	r=26
∑=1348	400	358	316	274	r=42
∑=1892	560	502	444	386	r=58
r=544	r=160	r=144	r=128	r=112	

On retrouve les mêmes propriétés curieuses que celles énoncées précédemment pour les matrices d'ordre n = 3. Ces grilles quand même assez remarquables, produits de deux carrés naturels de même ordre, qui présentent ainsi une sorte de « magie arithmétique », mettent un terme à cette incursion très superficielle dans le calcul matriciel !

Suggestion : Je propose au lecteur attentif, d'entamer une investigation plus poussée intéressant les carrés magiques considérés comme des matrices : un vaste programme.