Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

L'objectif principal de ce chapitre est la mise en place du cadre naturel dans lequel seront présentés et étudiés les différents concepts du calcul différentiel. Nous y introduisons notamment les outils analytiques et topologiques fondamentaux qui permettent l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs numériques ou vectorielles.

1 Généralités sur les normes

Dans tout cet ouvrage, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et nous écrirons simplement «espace vectoriel» pour désigner un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$.

1.1. Définitions Soit E un espace vectoriel. On appelle *norme* sur E, toute application notée usuellement :

$$\|\cdot\| \,:\, E \to \mathbf{R},\ x \mapsto \|x\|,$$

vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

i) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0_E$ (propriété de *séparation*),

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ (propriété d'*homogénéité*),

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

On appelle *espace vectoriel normé*, tout couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

1.2. Exemple La valeur absolue $|\cdot|$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ \ |x| \ = \ \max\{-x, x\} \ = \ \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

munit $\mathbf{R}$ d'une structure d'espace vectoriel normé (voir exercice 1.1).

1.3. Remarques Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, alors
a) $\|0_E\| = 0$.
b) Pour tout $x \in E$, $\|-x\| = \|x\|$.
c) Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$.
En effet, en prenant $\lambda = 0$ dans le point ii) de la définition 1.1, on obtient aussitôt a), et en prenant $\lambda = -1$, on déduit b). Enfin, en observant que pour tout $x \in E$, $0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$, on obtient c).

Les inégalités suivantes sont fréquemment utilisées tout le long de cet ouvrage.

1.4. Proposition *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Alors, pour tous* x *et* y *dans* E*, on a*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \ \leq \ \|x - y\| \ \leq \ \|x\| + \|y\|,$$

où l'inégalité à gauche est appelée «deuxième inégalité triangulaire».

Démonstration. L'inégalité $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$ découle de l'inégalité triangulaire et de la remarque 1.3 b) ci-dessus. En effet,

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| \ = \ \|x\| + \|y\|.$$

Montrons maintenant que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \ \leq \ \|x - y\|$.
On a
$$\|x\| \ = \ \|(x - y) + y\| \ \leq \ \|x - y\| + \|y\|$$
d'où
$$\|x\| - \|y\| \ \leq \ \|x - y\|. \tag{1.1}$$
De même,
$$\|y\| \ = \ \|(y - x) + x\| \ \leq \ \|y - x\| + \|x\|$$
d'où
$$-\|y - x\| \ \leq \ \|x\| - \|y\|. \tag{1.2}$$
De (1.1) et (1.2), et sachant que $\|y - x\| = \|x - y\|$, on déduit que

$$-\|x - y\| \ \leq \ \|x\| - \|y\| \leq \ \|x - y\|,$$

c'est-à-dire
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \ \leq \ \|x - y\|,$$
ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ des espaces vectoriels normés. Une question naturelle est de savoir s'il est possible de définir une norme sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$. La proposition qui suit répond à la question.

Notation Pour tous entiers a et b tels que $a < b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b. En d'autres termes :

$$[\![a, b]\!] \ = \ \{k \in \mathbf{Z}, \ \ a \leq k \leq b\}.$$

1.5. Proposition *Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ des espaces vectoriels normés. Alors, l'application $\|\cdot\|_\infty$ donnée pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ par*

$$\|x\|_\infty \ = \ \max_{k \in [\![1,\, n]\!]} \|x_k\|_{E_k},$$

définit une norme sur l'espace vectoriel produit E. On l'appelle souvent la norme infinie ou la norme de la convergence uniforme.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tel que $\|x\|_\infty = 0$. Puisque pour tout k de $[\![1,\, n]\!]$, on a $\|x_k\|_{E_k} \leq \|x\|_\infty$, et que $\|\cdot\|_{E_k}$ est une norme sur E_k, on en déduit que $x_k = 0_{E_k}$. D'où $x = 0_E$.
De plus, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\|\lambda x\|_\infty \ = \ \max_{k \in [\![1,\, n]\!]} \|\lambda x_k\|_{E_k} \ = \ |\lambda| \max_{k \in [\![1,\, n]\!]} \|x_k\|_{E_k} \ = \ |\lambda| \, \|x\|_\infty.$$

Montrons maintenant l'inégalité triangulaire.
Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E. Comme $\|\cdot\|_{E_k}$ est une norme sur E_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \|x_k + y_k\|_{E_k} \ &\leq \ \|x_k\|_{E_k} + \|y_k\|_{E_k} \leq \max_{i \in [\![1,\, n]\!]} \|x_i\|_{E_i} + \max_{i \in [\![1,\, n]\!]} \|y_i\|_{E_i} \\ &\leq \ \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ \ \|x_k + y_k\|_{E_k} \ \leq \ \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\max_{k \in [\![1,\, n]\!]} \|x_k + y_k\|_{E_k} \ \leq \ \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

c'est-à-dire

$$\|x + y\|_\infty \ \leq \ \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

On a donc prouvé que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_n$. □

1.6. Définition Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. On dit que
1) $\|\cdot\|$ est *plus fine* que $\|\cdot\|'$ s'il existe un réel $\mu > 0$ tel que

$$\forall x \in E\,,\ \ \|x\|' \ \leq\ \mu\,\|x\|,$$

2) $\|\cdot\|$ est *équivalente* à $\|\cdot\|'$ s'il existe λ et μ dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E\,,\ \ \lambda\,\|x\| \ \leq\ \|x\|' \ \leq\ \mu\,\|x\|, \tag{1.3}$$

et dans ce cas, on écrit $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.
3) $\|\cdot\|$ est *strictement plus fine* que $\|\cdot\|'$ si $\|\cdot\|$ est plus fine que $\|\cdot\|'$ et si $\|\cdot\|$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|'$.

Le résultat qui suit est suggéré par le point 2) de la définition 1.6.
Rappelons d'abord la notion fondamentale de relation d'équivalence.

1.7. Définition Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite :
– *réflexive* si : $\forall x \in E\,,\ \ x\,\mathcal{R}\,x,$
– *symétrique* si : $\forall x, y \in E,\ \ x\,\mathcal{R}\,y \ \Rightarrow\ y\,\mathcal{R}\,x,$
– *antisymétrique* si : $\forall x, y \in E\,,\ \ \big(x\,\mathcal{R}\,y \ \text{ et }\ y\,\mathcal{R}\,x\big) \ \Rightarrow\ x = y,$
– *transitive* si : $\forall x, y, z \in E\,,\ \ \big(x\,\mathcal{R}\,y \ \text{ et }\ y\,\mathcal{R}\,z\big) \ \Rightarrow\ x\,\mathcal{R}\,z,$
– *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.

1.8. Exemples 1) La relation $\leq$ dans $\mathbf{N}$ est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.
2) La relation d'orthogonalité dans l'ensemble des droites du plan euclidien est symétrique, mais n'est ni réflexive, ni antisymétrique, ni transitive.
3) La relation de congruence dans $\mathbf{Z}$ est une relation d'équivalence.

1.9. Proposition *La relation $\sim$ de la définition 1.6 est une relation d'équivalence.*

Démonstration. – La relation $\sim$ est réflexive.
En effet, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ puisque l'on a

$$\forall x \in E,\ \ \|x\| \ \leq\ \|x\| \ \leq \|x\|.$$

– La relation $\sim$ est symétrique.
Supposons en effet que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E\,,\ \ \lambda\,\|x\| \ \leq\ \|x\|' \ \leq\ \mu\,\|x\|.$$

Comme λ et μ sont strictement positifs, on a alors

$$\frac{1}{\mu}\,\|x\|' \;\leq \|x\| \;\leq\; \frac{1}{\lambda}\,\|x\|',$$

ce qui prouve que $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$.
– La relation $\sim$ est transitive car si $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$, alors il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in E$, on ait

$$\alpha\,\|x\| \;\leq\; \|x\|' \;\leq\; \beta\,\|x\| \quad \text{et} \quad \lambda\,\|x\|' \;\leq\; \|x\|'' \;\leq\; \mu\,\|x\|'.$$

On en déduit que

$$\alpha\,\lambda\,\|x\| \;\leq\; \|x\|'' \;\leq\; \beta\,\mu\,\|x\|,$$

ce qui prouve que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|''$.
On a donc démontré que $\sim$ est une relation d'équivalence. □

Désormais, lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre, nous noterons simplement 0 le vecteur nul 0_E d'un espace vectoriel E.

1.10. Remarque Si $E \neq \{0\}$, il résulte directement de la définition que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes si, et seulement si, les quotients $\|x\|/\|x\|'$ et $\|x\|'/\|x\|$ sont bornés lorsque x décrit $E \setminus \{0\}$. Par contraposition, on en déduit que s'il existe une suite (x_n) d'éléments de $E \setminus \{0\}$ telle que

$$\frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

alors les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes.
Nous utiliserons souvent cette remarque pour établir la non équivalence de deux normes.

2 Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$

Nous construisons ici trois normes très fréquemment utilisées dans $\mathbf{R}^n$. Nous étudierons d'autres exemples ultérieurement (exercice 1.33).

• **La norme** $\|\cdot\|_1$

2.1. Proposition *L'application* $\|\cdot\|_1 \,:\, \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *donnée pour tout vecteur* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbf{R}^n$ *par*

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^n$*.*

Démonstration. – Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; \sum_{k=1}^{n} |x_k| \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \big(\forall k \in [\![1,n]\!],\; |x_k| = 0\big) \\ &\Rightarrow \;\; \big(\forall k \in [\![1,n]\!],\; x_k = 0\big) \;\Rightarrow\; x = 0. \end{aligned}$$

– Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\|\lambda x\|_1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| \;=\; |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \;=\; |\lambda|\, \|x\|_1.$$

– Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 \;\; &= \;\; \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \;\le\; \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \\ &= \;\; \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire.
La proposition est donc démontrée. □

• **La norme euclidienne** $\|\cdot\|_2$
Rappelons d'abord que l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \;:\; \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\;, \;\; (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

définit un *produit scalaire* sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive. En d'autres termes :
– pour tout y fixé dans $\mathbf{R}^n$, l'application $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\; x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire,

– pour tout x fixé dans $\mathbf{R}^n$, l'application $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire,
– pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
– pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\langle x, x\rangle \geq 0$, et $\langle x, x\rangle = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

2.2. Lemme (Inégalité de Cauchy [1]- Schwarz [2]) *Pour tous vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Démonstration. Pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0.$$

En développant à l'aide de la bilinéarité et en tenant compte de la symétrie du produit scalaire, on obtient

$$\langle x + ty, x + ty\rangle = \langle y, y\rangle\, t^2 + 2t\,\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle.$$

Ce trinôme du second degré en t est donc positif pour tout $t \in \mathbf{R}$, et comme $\langle y, y\rangle \geq 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, le discriminant de ce trinôme est donc négatif ou nul, ce qui s'écrit

$$\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle \leq 0,$$

d'où

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

2.3. Proposition *L'application $\|\cdot\|_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ donnée pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ par*

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^n$, appelée norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

1. Cauchy Augustin (1789-1857). Mathématicien français. Il est à l'origine de l'analyse moderne : on lui doit notamment la théorie des équations différentielles et la théorie mécanique de l'élasticité.

2. Schwarz Hermann (1843-1921). Mathématicien allemand. Travailla sur les surfaces minimales, le calcul des variations et les fonctions analytiques.

Démonstration. – Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned} \|x\|_2 = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \;\Rightarrow\; \big(\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k^2 = 0\big) \\ \Rightarrow\; \big(\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0\big) \;\Rightarrow\; x = 0. \end{aligned}$$

– Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda^2 x_k^2\Big)^{1/2} = \Big(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} \\ &= |\lambda| \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} = |\lambda|\, \|x\|_2. \end{aligned}$$

– Pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$\|x + y\|_2^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|_2^2 + 2\,\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2. \tag{1.4}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle} = \|x\|_2\ \|y\|_2,$$

donc, d'après (1.4), il vient

$$\|x + y\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + 2\,\|x\|_2\,\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = \big(\|x\|_2 + \|y\|_2\big)^2.$$

D'où l'inégalité triangulaire :

$$\|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Ceci achève de montrer que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathbf{R}^n$. □

- **La norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme**

2.4. Proposition *L'application* $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *donnée pour tout vecteur* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbf{R}^n$ *par*

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,\, n]\!]} |x_k|$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la norme $\|\cdot\|_\infty$ étudiée dans la proposition 1.5 avec $E_k = \mathbf{R}$ et $\|\cdot\|_{E_k} = |\cdot|$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$. □