Chapitre 1

Suites numériques, modèles discrets

Cours

1 Notion de suite

Définition d'une suite

Une suite (u_n) est une fonction de l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. La variable est n, son image est $u(n)$ ou u_n.

u_n est aussi appelé terme de la suite (u_n) de rang n.

Notation d'une suite

Une suite (u_n) peut aussi être notée $u(n)$, ou u_n, ou encore $(u(n))$.

2 Exemples de mode de génération d'une suite

Une suite (u_n) peut être définie :

a. **Par une formule explicite du type $\boldsymbol{u_n = f(n)}$.**

Par exemple (u_n) définie par $u_n = 5n+3$ (où $f(x)=5x+3$).

b. **Par une formule de récurrence du type $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$.**

Par exemple (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 10 \\ u_0 = 7 \end{cases}$ (où $f(x)=2x-10$).

c. **Par une phrase.**

Par exemple (u_n) définie par « u_n est le n^e nombre premier ».

d. **Par un algorithme.**

Par exemple (u_n) définie par l'algorithme (sous Python) ci-contre :

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
def u(n):
    return 2*n-5
```

Qui donne avoir appuyé sur F5 (console IDLE) :

```
>>> u(0)
-5
>>> u(1)
-3
>>> u(7)
9
```

Cela signifie que $u_0 = -5$, $u_1 = -3$, $u_7 = 9$, etc.

e. **Par des motifs géométriques.**

Par exemple (u_n) définie par le nombre de points de chaque triangle ci-dessous :

On a alors : $u_0 = 0$ (pas de triangle), $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 6$, $u_4 = 10$ ...

Vocabulaire à connaître

Suite, terme, rang, formule explicite, formule de récurrence, algorithme, motif géométrique.

3 Suites arithmétiques

Définition d'une suite arithmétique

La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + r$ est appelée suite arithmétique de raison *r*.

Théorème (Calcul du terme général d'une suite arithmétique)

$u_n = u_p + (n-p)r$ pour tout entier *n* et *p*.

Théorème (Somme de termes d'une suite arithmétique)

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$ pour tout entier *n*.

En particulier $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout *n*.

Remarque

Une suite arithmétique traduit une évolution à accroissement constant. Par exemple, 10, 30, 50, 70… est une suite arithmétique correspondant à une évolution constante à accroissement constant de 20.

Propriété

La suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $x \to ax + b$ est une fonction affine) est une suite arithmétique de raison $r = a$.

4 Suites géométriques

Définition d'une suite géométrique

La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n \times q$ est appelée suite géométrique de raison q.

Théorème (Calcul du terme général d'une suite géométrique)

$u_n = u_p \times q^{n-p}$ pour tout entier n et p.

Théorème (Somme de termes d'une suite géométrique)

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout entier n (si $q \neq 1$).

En particulier $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} (q \neq 1)$ pour tout n.

Remarque

Une suite géométrique traduit une évolution à taux constant. Par exemple 10, 20, 40, 80, 160… est une suite géométrique correspondant à une évolution à taux constant de 100 %. Plus précisément, une augmentation de t % se traduit par une suite géométrique de raison $q = 1 + \dfrac{t}{100}$ et une diminution de t % par une suite géométrique de raison $q = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Propriété :

La suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ (où $x \to a^x$ est une fonction exponentielle) est une suite géométrique de raison $q = a$.

5 Sens de variation d'une suite

Définition d'une suite croissante

Lorsque pour tout n, $u_{n+1} > u_n$, on dit que la suite (u_n) est croissante.

Définition d'une suite décroissante

Lorsque pour tout n, $u_{n+1} < u_n$, on dit que la suite (u_n) est décroissante.

Concept logique

Inégalité caractéristique de la croissance ou décroissance d'une suite.

Cours

6 Approche de la limite d'une suite à partir d'exemples

Conjecture d'une limite « fixe » L

Lorsqu'une suite prend des valeurs de plus en proche d'une valeur fixe L, on peut conjecturer que $\lim u_n = L$.

Par exemple, si on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+2}$. On peut conjecturer (en utilisant un tableur), que $\lim u_n = 3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	un	0,5	1,33	2,17	2,55	2,72	2,81	2,87	2,9	2,92	2,94	2,95	2,96	2,97	2,97	2,97	2,98	2,98

Conjecture d'une limite égale à + ∞

Lorsqu'une suite prend des valeurs de plus en plus grandes, on peut conjecturer que $\lim u_n = +\infty$.

Par exemple, si on considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 5n + 1$. On peut conjecturer (en programmant avec un tableur ses valeurs), que $\lim u_n = +\infty$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	un	1	7	15	25	37	51	67	85	105	127	151	177	205	235	267	301	337

Conjecture d'une limite égale à – ∞

Lorsqu'une suite prend des valeurs de plus en plus grandes négativement, on peut conjecturer que $\lim u_n = -\infty$.

Par exemple, si on considère la suite (u_n) définie par $u_n = -10n - 15$. On peut conjecturer (en programmant avec un tableur ses valeurs), que $\lim u_n = -\infty$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	un	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	-115	-125	-135	-145	-155	-165	-175

Concept logique

Conjecture d'une limite à l'aide d'une feuille de calcul d'un tableur.

Exercices

Compétences attendues

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre

Exercice 1.1

Changer de registre, Communiquer un résultat par écrit)

- Traduire dans un langage naturel :

1. la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 2n+1$.
2. la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 0$.
3. la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…
4. la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ et $u_0 = 0$.
5. la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32…

Exercice 1.2

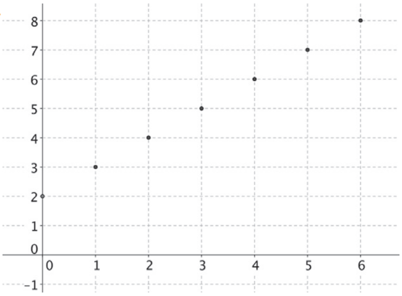
Changer de registre

- Traduire dans un registre algébrique :

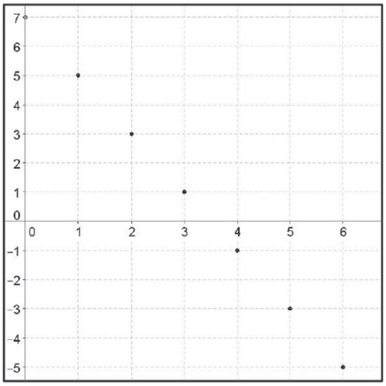
1. la suite 2, 5, 8, 13…
2. la suite 1, -1, 1, -1,…
3. la suite 0, 1, 4, 9, 16…
4. la suite 2, 0, 2, 0, 2…
5. la suite 1, 2, 5, 10, 17…
6. la suite de Galilée : 0, 5, 20, 45, 80, 125, 180…
7. la suite de Hanoï : 1, 3, 7, 15, 31…
8. la suite 0, 1, 3, 6, 10, 15…

9. la suite définie par le nuage de points ci-dessous :

a.

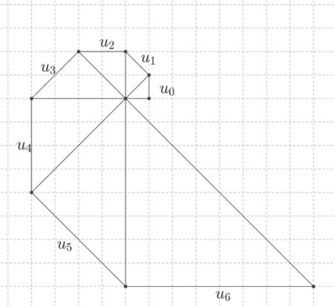


b.

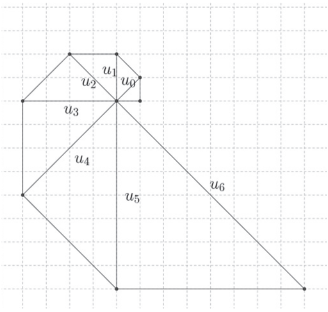


10. la suite définie géométriquement ci-dessous :

a.



b.



Exercice 1.3

Changer de registre

Traduire dans un registre algébrique :

1. la suite des nombres positifs pairs.
2. la suite des nombres positifs impairs.
3. la suite des puissances de trois.
4. la suite 1, 4, 7, 10, 13,...
5. la suite 100, 50, 25, 12,5...
6. la suite 200 , 190, 180, 170, 160...
7. la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...
8. la suite de Syracuse : 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...

Compétences attendues

- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement

Exercice 1.4

Modéliser, Changer de registre

- Dans chaque cas, modéliser par une suite (u_n) la situation proposée en donner l'expression algébrique u_n :

1. Une boutique informatique propose des cartes SD de 1, 2, 4…512 go.
2. Dans un étang, chaque jour le nombre de nénuphars triple (2 au départ).
3. Dans un élevage de 800 volailles, chaque nuit, des renards en prélèvent 8.
4. Dans un poulailler, chaque matin, il y a trois nouveaux œufs (0 au départ).

Exercice 1.5

Modéliser, Changer de registre

- Dans chaque cas, modéliser par une suite (u_n) la situation proposée en donner l'expression algébrique u_n :

1. La suite définie par les quatre premières figures ci-dessous :