Chapitre 1

Lois et théorèmes généraux en régime continu

1. Généralités

1.1. Les circuits électriques

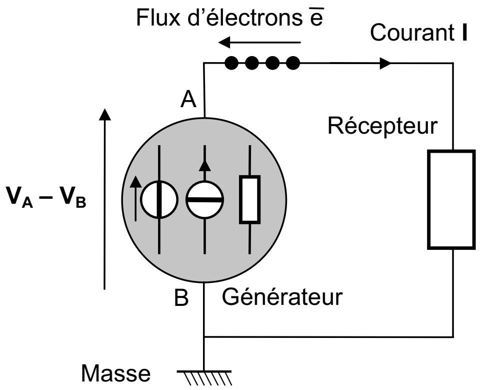
D'une manière générale, tout circuit électrique peut se représenter sous la forme d'un **générateur** ou source d'énergie alimentant un **récepteur**, chargé de transformer l'énergie électrique en une autre forme exploitable. Ces deux éléments sont reliés par des conducteurs métalliques.

Le transfert de charges électriques (électrons) entre ces éléments crée un courant électrique, que l'on oriente en sens contraire du flux d' $\overline{e}$.

Ce courant, exprimé en ampères (A), représente la quantité de charges q (en coulombs) traversant une section donnée du conducteur par unité de temps :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

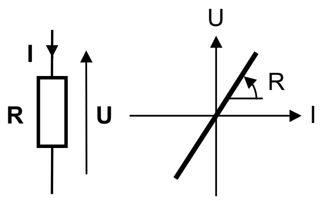
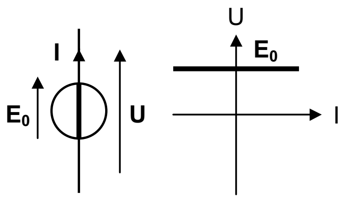
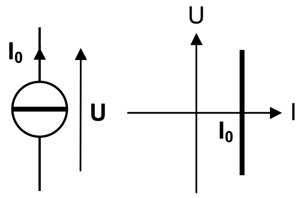
En **régime continu**, il est indépendant de t.
On le note avec une lettre majuscule **I**.



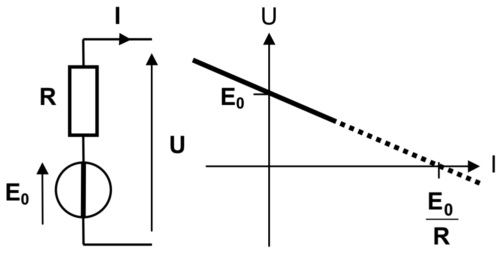
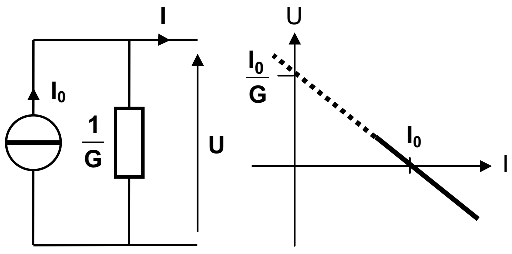
Pour établir ce régime, il faut employer des générateurs, qui maintiennent entre leurs bornes A et B une **différence de potentiel $V_A - V_B$** ou **tension** constante. Elle s'exprime en volts (V). On considère, en général, que la borne B constitue la référence de tension pour l'ensemble du circuit et se trouve au potentiel 0 V (on dit aussi à la **masse**). On la repèrera par sur les schémas.

1.2. Les dipôles électriques

Un dipôle électrique est une portion de circuit comportant deux bornes. Leur association constitue les **réseaux électriques**. Les dipôles générateurs sont dits **actifs**, ceux qui ne font que consommer de l'énergie sont dits **passifs**.

Résistance	Source de tension idéale	Source de courant idéale
		
Dipôle **passif** Caractéristique (**loi d'Ohm**) :	Dipôle **actif** Caractéristique :	Dipôle **actif** Caractéristique :
$\boxed{U = R \cdot I}$ ou $\boxed{I = G \cdot U}$	$\boxed{U = E_0}$	$\boxed{I = I_0}$
R : résistance en ohms (Ω) **G** : conductance en siemens (S)	E_0 : force électromotrice (fém)	I_0 : courant de court-circuit

Dans la réalité, les sources de tension et de courant ne sont pas idéales et on considère qu'un modèle plus proche de la réalité, consiste à associer une résistance en série avec une source de tension idéale ou une résistance en parallèle avec une source de courant idéale.

Source de tension réelle	Source de courant réelle
	
Caractéristique : $\boxed{U = E_0 - R \cdot I}$	Caractéristique : $\boxed{I = I_0 - G \cdot U}$

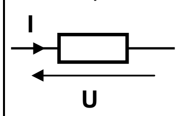
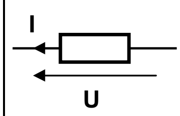
1.3. Conventions

On dirige systématiquement les flèches des courants et des tensions dans le même sens pour le générateur (convention générateur) et en sens contraire pour tout récepteur (convention récepteur).

Il ne faut pas, néanmoins, confondre conventions et modes de fonctionnement. Le tableau ci-contre donne les **modes de fonctionnement** du dipôle, compte tenu de la convention adoptée et du signe de **P = U.I**.

Ainsi, on peut dire que :

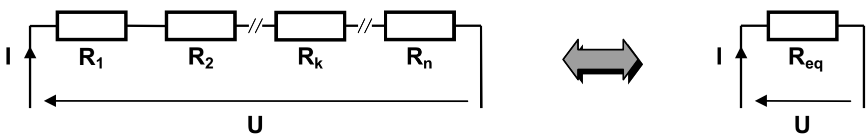
- le dipôle **reçoit** de la puissance lorsqu'il fonctionne en récepteur ;
- il en **fournit** lorsqu'il fonctionne en générateur.

	Choix de la convention	
Signe de P	Récepteur 	Générateur 
P > 0	**Récepteur**	**Générateur**
P < 0	**Générateur**	**Récepteur**

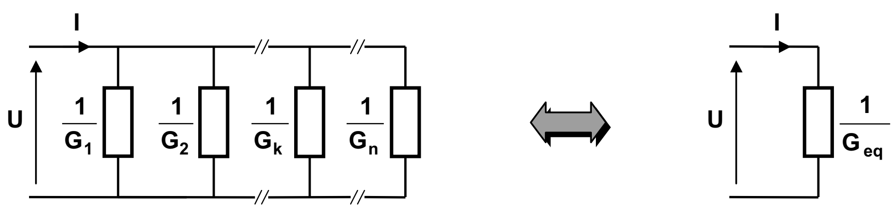
2. Lois d'association de résistances

En associant des résistances, on forme un dipôle qui se comporte comme une résistance, dont la valeur est appelée **résistance équivalente** notée R_{eq} ou **conductance équivalente** notée G_{eq}.

- Association en série : $\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$



- Association en parallèle : $\boxed{G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$



3. Lois de KIRCHHOFF

3.1. Définitions topologiques

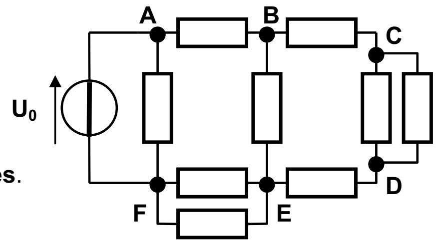
Branche	Ensemble de dipôles connectés en série ou en parallèle et limités par deux points entre lesquels aucune dérivation de courant ne se produit.
Nœud	Point où arrivent plusieurs branches (= extrémités des branches).
Maille	Ensemble de branches formant un circuit fermé, chacun des nœuds n'appartenant qu'à deux branches de ce circuit fermé.

- <u>**Exemple**</u> :

  A, **B**, **C**, **D**, **E** et **F** sont les **nœuds**.

  AB, **AF**, **BC**, **EF** ... sont des **branches**.

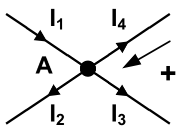
  Les trajets **ABEFA**, **BCDEB** et **ACDFA** sont des **mailles**.



3.2. Loi des nœuds

La somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud (ou qui en partent) est nulle.

- <u>**Exemple**</u> :



Nœud et son orientation

Elle traduit la conservation de l'électricité : il ne peut y avoir accumulation de charges électriques en un point du circuit.

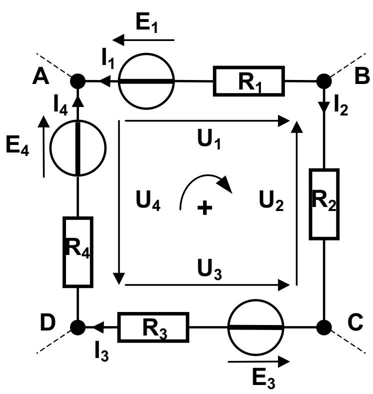
Ainsi, en comptant positivement les courants dirigés vers le nœud et négativement ceux qui en sortent, on obtient :

$$\boxed{I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0}$$

3.3. Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle.

- <u>**Exemple**</u> :



Ainsi, le long de la maille **ABCDA**, après avoir choisi un sens de parcours, on obtient la relation :

$$\boxed{U_1 - U_2 - U_3 - U_4 = 0}$$

C'est à dire :

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - E_3 - R_3 \cdot I_3 + E_4 - R_4 \cdot I_4 = 0$$

<u>**Nota**</u> : $\mathbf{R_k.I_k}$ est précédé du signe (**+**) si le sens d'orientation de la branche (courant) est opposé au sens de parcours de la maille. $\mathbf{E_k}$ est précédé du signe (**+**) si son sens est identique à celui de la maille.

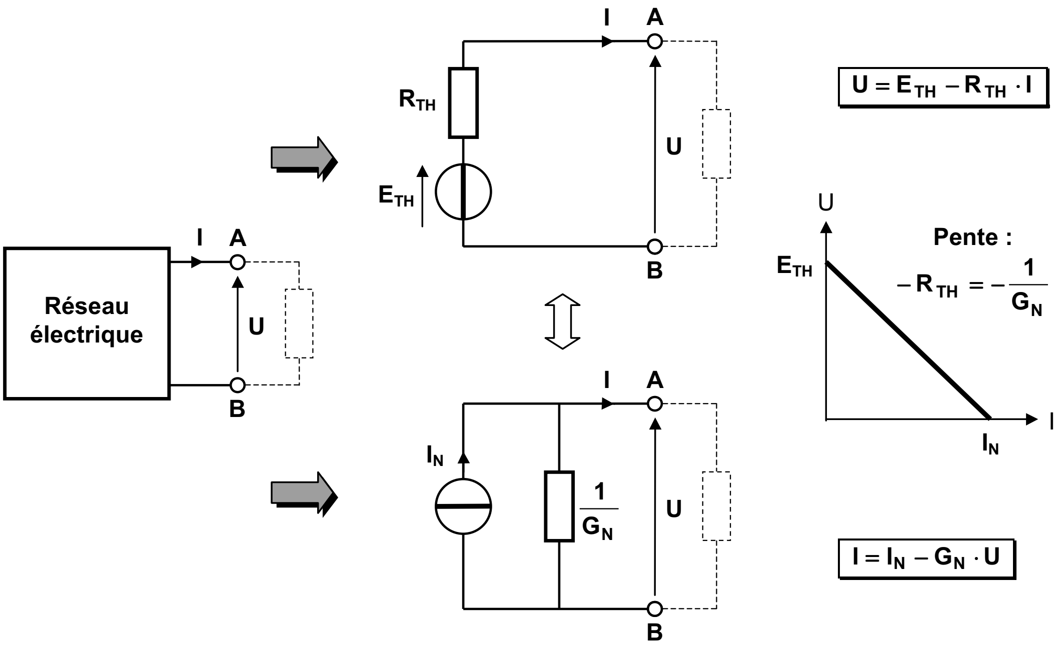
Les lois de KIRCHHOFF ont l'avantage d'être universelles et de permettre la résolution de toutes les configurations de réseaux électriques. Il suffit d'écrire autant de lois des nœuds et de lois des mailles qu'il y a de variables électriques présentes dans le réseau étudié et de résoudre ensuite le système linéaire ainsi formé.

Mais dans certains cas, plusieurs théorèmes complémentaires, corollaires de ces lois, permettent d'aboutir plus rapidement au résultat. C'est l'objet de cette partie : **mettre en place des outils pratiques et rapides de résolution des circuits**.

4. Théorèmes de THÉVENIN et de NORTON

On peut montrer qu'un réseau électrique (constitué de sources de tension, de courant et de résistances) vu de ses bornes **A** et **B** peut être modélisé par :

- une source de tension $\mathbf{E_{TH}}$ en série avec une résistance $\mathbf{R_{TH}}$: c'est le modèle de **THÉVENIN** ;
- une source de courant $\mathbf{I_N}$ en parallèle avec une résistance $\mathbf{1/G_N}$: c'est le modèle de **NORTON**.



$$\boxed{U = E_{TH} - R_{TH} \cdot I}$$

$$\boxed{I = I_N - G_N \cdot U}$$

On peut passer immédiatement d'un modèle à l'autre à l'aide des relations :

$$\boxed{\begin{aligned} R_{TH} &= \frac{1}{G_N} \\ E_{TH} &= R_{TH} \cdot I_N \end{aligned}}$$

On obtient les éléments des modèles de **THÉVENIN** et de **NORTON** par la méthode suivante :

➔ $\mathbf{E_{TH}}$ est la tension qui apparaît aux bornes du réseau **à vide** : **I = 0** (charge déconnectée)

➔ $\mathbf{I_N}$ est le courant mesuré entre les bornes A et B lorsqu'elles sont **court - circuitées** : **U = 0**

➔ $\mathbf{R_{TH}}$ (ou $1/G_N$) est la résistance interne du réseau vue des bornes A et B, après avoir rendu passives toutes les sources indépendantes du réseau :

- *les **sources de tension idéales** sont remplacées par des **court - circuits** (fils).*
- *les **sources de courant idéales** sont remplacées par des **circuits ouverts** (enlevées).*

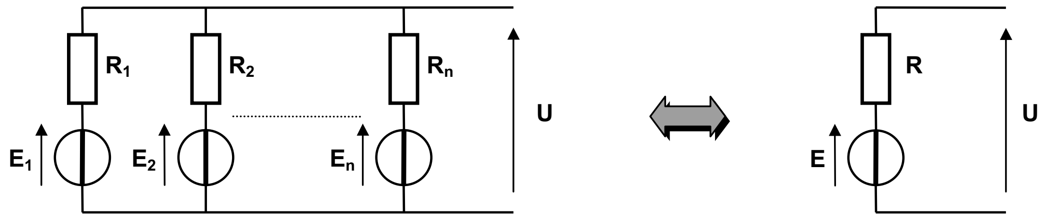
5. Théorème de MILLMAN

5.1. Théorème relatif aux générateurs de tension

On considère **n** générateurs de tension en parallèle, de résistance interne $\mathbf{R_k}$ et de fém $\mathbf{E_k}$.

Cet ensemble peut être remplacé par un générateur de tension unique :

➔ de résistance interne : $\boxed{R = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}}$ et de fém : $\boxed{E = R \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k}}$.



- **Remarque** : Une branche constituée d'une source de tension en série avec une résistance peut résulter de la transformation préalable d'une source de courant en parallèle avec cette même résistance (cf. théorèmes de THÉVENIN et de NORTON).

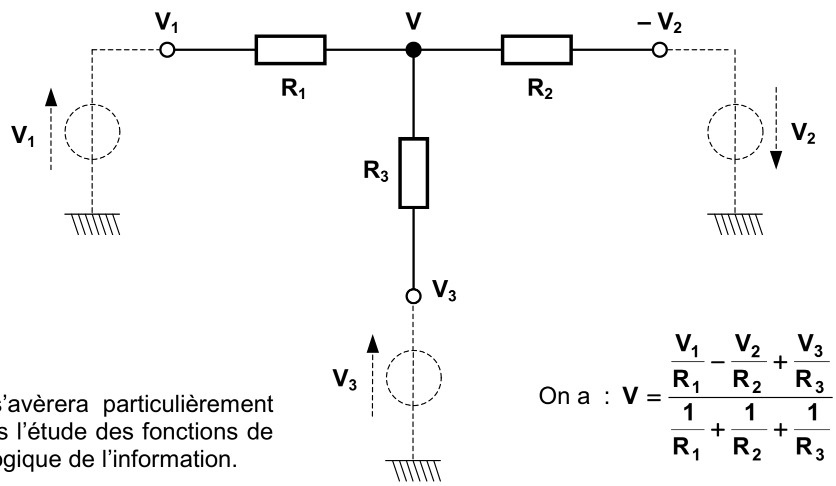
5.2. Théorème relatif au potentiel d'un point

On considère un nœud de courant de potentiel* **V** dans un réseau. Ce nœud est le point de jonction de **n** résistances $\mathbf{R_k}$, soumises aux potentiels $\mathbf{V_K}$ de l'autre côté du nœud.

** Le potentiel d'un point de circuit est la tension entre ce point et la masse.*

➔ Le potentiel **V** du nœud a pour expression : $\boxed{V = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{R_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}}$.

- **Exemple** :



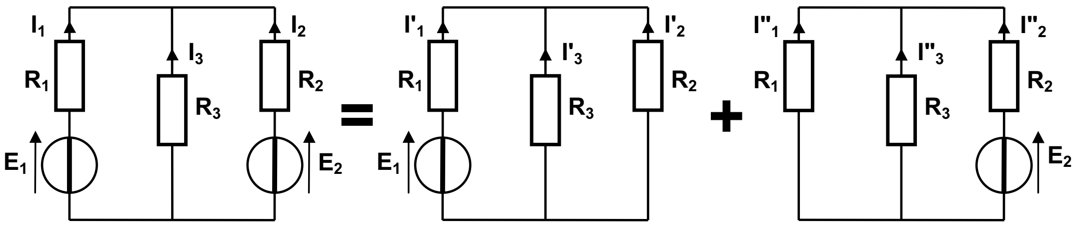
Ce théorème s'avèrera particulièrement intéressant dans l'étude des fonctions de traitement analogique de l'information.

On a : $V = \dfrac{\dfrac{V_1}{R_1} - \dfrac{V_2}{R_2} + \dfrac{V_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$

6. Théorème de superposition

La réponse (en courant ou en tension) d'un réseau, contenant plusieurs sources indépendantes agissant simultanément, est égale à la somme des réponses (en courant ou en tension) dues à chaque source agissant isolément.

- **Illustration** : Calcul des courants I_1, I_2 et I_3 dans les différentes branches.



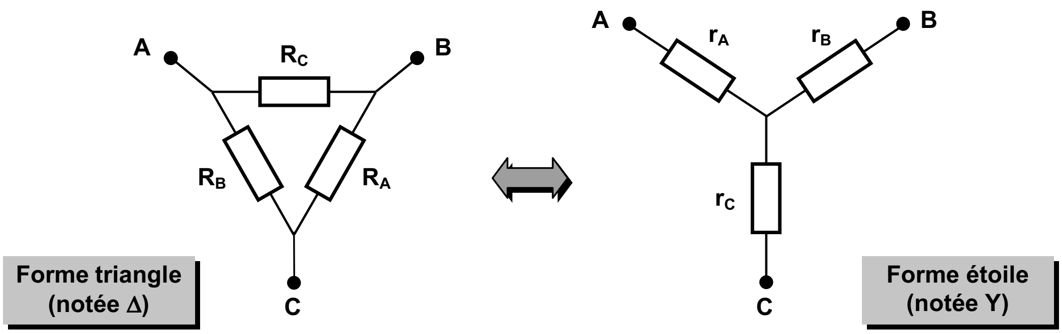
Source E_2 passivée **Source E_1 passivée**

En vertu du théorème de superposition, on a : $\boxed{I_1 = I'_1 + I''_1}$ $\boxed{I_2 = I'_2 + I''_2}$ $\boxed{I_3 = I'_3 + I''_3}$

7. Théorème de KENNELY : transformation TRIANGLE ↔ ÉTOILE

Le théorème de KENNELY donne les relations de transformation :

- d'un réseau en **forme d'étoile** en réseau équivalent en **forme de triangle** ;
- d'un réseau en **forme de triangle** en réseau équivalent en **forme d'étoile**.



Pour la **transformation TRIANGLE → ÉTOILE**, on montre que les expressions des résistances r_k se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire :

$$\boxed{r_A = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}} \qquad \boxed{r_B = \frac{R_A \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}} \qquad \boxed{r_C = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B + R_C}}$$

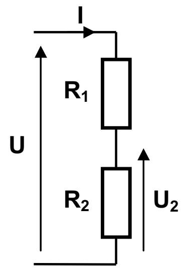
La **transformation inverse** (ÉTOILE → TRIANGLE) ne présente pas d'intérêt pour le calcul des réseaux parce qu'elle rajoute une maille. Elle est toutefois utilisée dans d'autres domaines *(réseaux triphasés par exemple)*. Avec les conductances $G_k = 1 / R_k$ et $g_k = 1 / r_k$, on montre que :

$$\boxed{G_A = \frac{g_B \cdot g_C}{g_A + g_B + g_C}} \qquad \boxed{G_B = \frac{g_A \cdot g_C}{g_A + g_B + g_C}} \qquad \boxed{G_C = \frac{g_A \cdot g_B}{g_A + g_B + g_C}}$$

8. Diviseurs de tension et de courant

8.1. Relations classiques

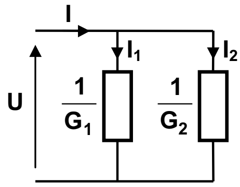
<table>
<tr><th>Diviseur de tension</th><th>Diviseur de courant</th></tr>
<tr><td>



Le même courant I traverse R_1 et R_2.

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

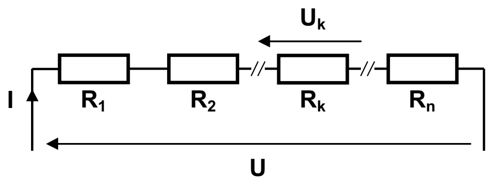
</td><td>



La même tension U est appliquée aux bornes de $1/G_1$ et $1/G_2$.

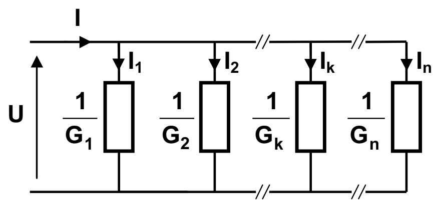
$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot I$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ces résultats se généralisent à **n** branches (n > 2).</td></tr>
<tr><td>



$$U_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \cdot U$$

</td><td>

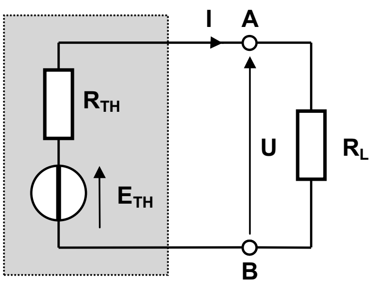


$$I_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} \cdot I$$

</td></tr>
</table>

8.2. Relations source - charge

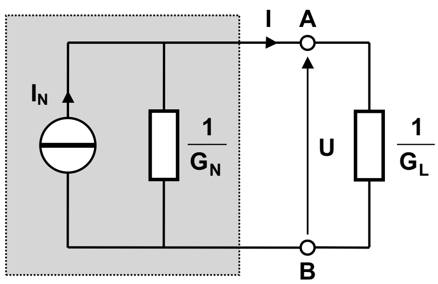
<table>
<tr><th>Source de tension réelle + Charge</th><th>Source de courant réelle + Charge</th></tr>
<tr><td>



Modèle de THÉVENIN
du réseau vu des bornes A et B

$$U = \frac{R_L}{R_L + R_{TH}} \cdot E_{TH}$$

</td><td>



Modèle de NORTON
du réseau vu des bornes A et B

$$I = \frac{G_L}{G_L + G_N} \cdot I_N$$

</td></tr>
</table>

Chapitre 2

Circuits électriques en régime variable

1. Principes généraux

1.1. Régime variable

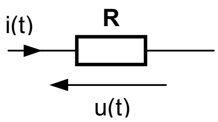
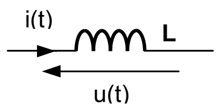
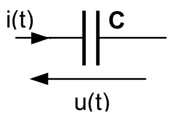
Un circuit électrique fonctionne en **régime variable** lorsqu'il est alimenté par des sources de courant ou de tension fonctions du temps ou lorsque sa configuration est modifiée, à un instant donné, par l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur par exemple.

Les **signaux** (courants et tensions) sont alors **variables**, fonctions du temps. Néanmoins, des signaux continus peuvent coexister avec ces signaux variables. On appelle **valeur instantanée**, l'expression temporelle d'un signal, que l'on note par une lettre minuscule : par exemple u(t), i(t), etc. Ce chapitre a pour but de déterminer les **expressions mathématiques** des valeurs instantanées.

1.2. Dipôles élémentaires

Les circuits électriques en régime variable sont constitués de divers éléments. On retrouve les sources de tension et de courant (cf. chapitre 1) dont les valeurs seront tantôt constantes, tantôt fonctions du temps, et les résistances. D'autres dipôles passifs linéaires sont utilisés : bobine et condensateur, ainsi que des dipôles non linéaires comme les interrupteurs, les diodes, etc.

1.2.1. **Dipôles passifs** : Equations de fonctionnement

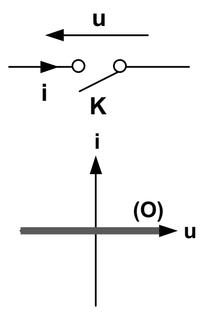
Résistance	Bobine parfaite	Condensateur parfait
		
R : résistance en **Ω** (ohms)	**L** : inductance en **H** (henrys)	**C** : capacité en **F** (farads)
Relation tension - courant :	Relation tension - courant :	Relation tension - courant :
$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)}$	$\boxed{u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}}$	$\boxed{i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}}$

1.2.2. **Interrupteurs :** Caractéristiques

Ils peuvent être de type mécanique, mais on utilise surtout des **composants de l'électronique** : diodes, transistors, ... fonctionnant en régime de commutation.

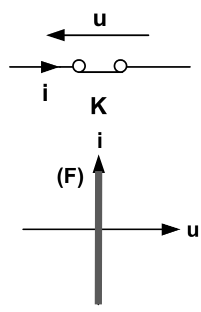
Ces commutateurs sont généralement unidirectionnels en courant ou en tension : une partie seulement des caractéristiques données ci-contre est atteinte.

De plus, ils ne sont parfaits qu'en première approximation (en négligeant tensions de seuil, courants résiduels, etc.).



Etat OUVERT (O)

Caractérisé par **i = 0**



Etat FERMÉ (F)

Caractérisé par **u = 0**