Chapitre 1

Généralités sur les problèmes différentiels

1 Quelques généralités sur les équations différentielles

Dans tout ce qui suit, la lettre u désigne une fonction qui dépend d'une variable réelle t décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$ et implicitement supposée dérivable sur un intervalle adéquat, de dérivée u'. Pour alléger les notations, on omet souvent de rappeler la dépendance à la variable en écrivant u et u' à la place de $u(t)$ et $u'(t)$.

1.1 Forme générale d'une équation différentielle ordinaire

De manière générale, on désigne par *équation différentielle ordinaire* (en abrégé E.D.O.) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ toute équation définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme

$$F\big(t, u, u', \cdots, u^{(n)}\big) = 0 \tag{1.1}$$

où

1. u désigne une fonction inconnue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (cas des équations scalaires) ou $\mathbb{R}^n$ (cas des équations vectorielles),
2. u' désigne la dérivée de u et $u^{(k)}$ (pour $k \in \{2, \cdots, n\}$) désigne la dérivée k-*ième* de u,
3. F désigne une fonction continue sur un domaine adéquat.

1.2 Forme résolue d'une équation différentielle

Lorsqu'il est possible d'isoler la dérivée $u^{(n)}$ d'ordre le plus élevé en exhibant une nouvelle fonction G de sorte à avoir

$$F\big(t, u, u', \cdots, u^{(n)}\big) = 0 \Longleftrightarrow u^{(n)} = G\big(t, u, u', \cdots, u^{(n-1)}\big)$$

on dit que l'équation différentielle admet une forme *résolue*.

Définition 1. Avec les notations précédentes, lorsqu'elle existe, on appelle forme *résolue* de l'équation différentielle ordinaire (1.1) la forme

$$u^{(n)} = G\big(t, u, u', \cdots, u^{(n-1)}\big) \tag{1.2}$$

Parmi les équations différentielles résolues, celles du premier ordre, qui seront écrites par la suite sous la forme

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \tag{1.3}$$

jouent un rôle particulier. Il est en effet possible, grâce à quelques manipulations simples, de ramener toute équation différentielle résolue d'ordre $n \geq 2$ à une équation résolue du premier ordre. Il en est de même pour les systèmes différentiels d'ordre 1.

1.3 Lien entre E.D.O. résolue d'ordre $n \geq 2$ et E.D.O. résolue d'ordre 1

Considérons l'équation différentielle résolue d'ordre 2

$$u''(t) = G\big(t, u(t), u'(t)\big)$$

et remarquons qu'en introduisant la fonction vectorielle $U : t \mapsto \big(u(t), u'(t)\big)$ et en confondant le vecteur $U(t)$ avec sa représentation dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par une matrice colonne, l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme matricielle équivalente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{Bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(t) \\ G\big(t, u(t), u'(t)\big) \end{Bmatrix}$$

Autrement dit, en faisant intervenir une nouvelle fonction, notée f, qui dépend de la variable réelle t et d'une variable vectorielle de coordonnées (x, y) définie par

$$f : \big(t, (x, y)\big) \mapsto \big(y, G\big(t, x, y\big)\big)$$

on a l'équivalence

$$u''(t) = G\big(t, u(t), u'(t)\big) \Longleftrightarrow U'(t) = f\big(t, U(t)\big)$$

Ce cas particulier se généralise sans difficulté, c'est à dire que toute équation différentielle résolue d'ordre $n \geq 2$ de la forme

$$u^{(n)}(t) = G\big(t,\, u(t), \cdots,\, u^{(n-1)}\big)$$

se ramène à l'équation différentielle (vectorielle) résolue d'ordre 1

$$U'(t) = f\big(t, U(t)\big)$$

en posant

$$\begin{cases} U(t) & = & \big(u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)\big) \\ f\big(t, U(t)\big) & = & \big(u(t), \cdots, u^{(n-1)}(t), G\big(t,\, u(t), \cdots,\, u^{(n-1)}(t)\big)\big) \end{cases}$$

c'est à dire, toujours en confondant un vecteur avec sa représentation matricielle sous forme de matrice colonne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{Bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-2)}(t) \\ u^{(n-1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \\ G\big(t,\, u(t), \cdots,\, u^{(n-1)}(t)\big) \end{Bmatrix}$$

Donnons deux exemples particuliers et instructifs d'équations différentielles du second ordre, la première linéaire et la seconde non linéaire.
Commençons par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$u''(t) = b(t)u'(t) + c(t)u(t) + d(t)$$

où b, c, d sont trois fonctions continues. Il est donc possible d'en donner la forme matricielle équivalente (la seconde égalité est obtenue grâce au caractère linéaire)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{Bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(t) \\ b(t)u'(t) + c(t)u(t) + d(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & b(t) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ d(t) \end{Bmatrix}$$

On obtient alors la forme résolue $U'(t) = f\big(t, U(t)\big)$ en posant $Y : t \mapsto U(t) = \big(u(t), u'(t)\big)$ et

$$f : \big(t, (x, y)\big) \mapsto f\big(t, (x, y)\big) = \big(y, b(t)y + c(t)x + d(t)\big)$$

Considérons maintenant l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$u''(t) + u(t)u'(t) + t^2 = 1$$

On remarque qu'en posant $F : (t, x, y, z) \mapsto z + xy + t^2 - 1$ on obtient la forme générale

$$u''(t) + u(t)u'(t) + t^2 = 1 \Longleftrightarrow F\big(t, u(t), u'(t), u''(t)\big) = 0$$

D'autre part, cette même équation peut être écrite sous forme résolue. En effet,

$$u''(t) + u(t)u'(t) + t^2 = 1 \Longleftrightarrow u''(t) = 1 - u(t)u'(t) - t^2$$

et il suffit alors de poser $G : (t, x, y) \mapsto 1 - xy - t^2$ pour avoir la forme générale résolue

$$u''(t) + u(t)u'(t) + t^2 = 1 \Longleftrightarrow u''(t) = G\big(t, u(t), u'(t)\big)$$

> On retiendra donc que toute équation différentielle scalaire résolue d'ordre $n \geq 2$ peut se ramener à une équation différentielle résolue d'ordre 1 de la forme (1.3).

1.4 Lien entre système différentiel d'ordre 1 et E.D.O. résolue d'ordre 1

Cette manière de procéder se généralise aussi aux systèmes différentiels. En effet, si l'on considère le système de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = F_1\big(t, u(t), v(t)\big) \\ v'(t) = F_2\big(t, u(t), v(t)\big) \end{cases} \tag{1.4}$$

il est bien évident qu'il est équivalent à

$$U'(t) = f\big(t, U(t)\big)$$

en posant

$$\begin{cases} U(t) & = & \big(u(t), v(t)\big) \\ f\big(t, U(t)\big) & = & \big(F_1\big(t, u(t), v(t)\big), F_2\big(t, u(t), v(t)\big)\big) \end{cases}$$

Dans le cas d'un système de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = a_1(t)u(t) + b_1(t)v(t) + c_1(t) \\ v'(t) = a_2(t)u(t) + b_2(t)v(t) + c_2(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

on peut profiter de la linéarité des équations pour écrire (1.5) sous la forme équivalente

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$$

où

$$A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } B : t \mapsto \begin{Bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{Bmatrix}$$

On retiendra donc que tout système différentiel d'ordre 1 peut se ramener à une équation différentielle résolue d'ordre 1 de la forme (1.3).

1.5 Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 2. Avec les notations précédentes, on appelle *problème de Cauchy* (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, mathématicien français) tout système de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

où la variable t décrit un intervalle I contenant la valeur t_0 et où f est une fonction continue sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ de la forme $I \times J$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.
La condition $u(t_0) = u_0$ est appelée une *condition initiale* ou *condition de Cauchy*.

Remarque. Dans la pratique, le couple (t_0, u_0) doit bien sûr appartenir à un domaine sur lequel la fonction f est définie. Pour être plus précis, la fonction f sera définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (où n est un entier non nul qui peut être, dans le cas d'une équation différentielle scalaire, son ordre) avec $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Les problèmes de Cauchy ont un statut particulier. En effet, sous des conditions adéquates sur la fonction f, le théorème de Cauchy-Lipschitz (Rudolph Lipschitz, 1832-1903, mathématicien allemand) affirme qu'un tel problème possède une unique solution. Il existe plusieurs versions de ce théorème et seule la version « classique » est donnée sans démonstration (voir par exemple [DE]). Elle utilise une hypothèse forte sur la fonction f qui peut être largement affaiblie.

Théorème 1. De Cauchy-Lipschitz.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^n$ et $(t_0, u_0) \in \Omega$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors le problème de Cauchy (1.6)

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur un intervalle ouvert et elle est dite *maximale* dans le sens où tout autre solution du problème (1.6) est une restriction de cette solution *maximale*.

2 Solveur numérique de *Scilab*

Le logiciel libre de calcul scientifique *Scilab* (`http://www.scilab.org/fr`) propose une fonction de résolution des équations différentielles désignée par `ode` pour *ordinary differential equation*.
L'algorithme utilisé par défaut dans la fonction `ode` est construit à partir d'un schéma numérique très performant qui s'adapte automatiquement et de manière dynamique à la nature de l'équation différentielle. Il existe en effet une catégorie d'équations différentielles, regroupées sous le terme de *problèmes raides*, pour lesquelles les méthodes numériques « classiques » se révèlent souvent inefficaces et nécessitent un nombre de nœuds de calcul considérable pour un résultat pas toujours satisfaisant. L'algorithme utilisé par défaut dans la procédure `ode` est donc capable de s'adapter dynamiquement à ce type de problème pour utiliser le schéma le plus performant.
Cela dit, l'objectif n'est pas ici de détailler le fonctionnement des méthodes utilisées mais seulement de présenter l'utilisation de la fonction `ode`. Avant de commencer, précisons qu'elle ne peut résoudre que des problèmes de Cauchy.

2.1 Solveur `ode`

Décrivons succinctement comment utiliser la fonction `ode` pour résoudre un problème de Cauchy de la forme (1.6)

$$\begin{cases} \forall\, t \in]\, t_0, t_0 + T], \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = \alpha \end{cases}$$

La syntaxe générale est `solution=ode('type de méthode',u0,t0,t,f)` où :

1. Le couple `(t0,u0)` désigne la condition initiale $u(t_0) = u_0$.
2. `f` désigne la fonction qui définit l'équation différentielle $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$.
3. `t` désigne la liste des nœuds de calcul.
4. `'type de méthode'` désigne un paramètre optionnel sous la forme d'une chaîne de caractères permettant de choisir la méthode de calcul. Le lecteur est renvoyé à l'aide en ligne pour plus de détails.

5. `solution` est un vecteur contenant les valeurs approchées en chaque nœud de calcul.

La déclaration de la grille de temps `t` se fait en général à l'aide de la fonction `linspace` sous la forme `t=linspace(a,b,Nnc)` pour obtenir `Nnc` nœuds de calcul régulièrement espacés dans l'intervalle $[a, b]$, le premier nœud de calcul étant a et le dernier b.
Par exemple, on peut taper dans la console de *Scilab*

```
-->t= linspace(0,1,5)
   ans  =
   0.   0.25   0.5   0.75   1.
```

Quant à la déclaration de la fonction f, elle se fait à l'aide de la commande `function`.
Par exemple, pour l'équation différentielle

$$u'(t) = 0,055 - 0,04u(t) - 0,0032u^2(t) = f\big(t, u(t)\big)$$

on pourra par exemple déclarer la fonction f dans l'éditeur *Scinote* sous la forme

```
function uprime=f(t,u)
   uprime=0.055-0.04*u-0.0032*u.*u;
endfunction
```

Remarque. Dans l'écriture `u.*u` le point a une grande importance (voir l'aide *Scilab* pour plus de détails sur les opérateurs).

2.2 Application 1 : un problème d'éolienne face au vent

2.2.1 Modélisation

Considérons une éolienne dont l'hélice, qui tourne autour de son axe de rotation à la vitesse $u : t \mapsto u(t)$ (en $tr \cdot s^{-1}$) en fonction du temps t lorsqu'elle est soumise à un champ de vitesse $v : t \mapsto v(t)$ (en $m \cdot s^{-1}$) choisi ici constant et égal à 25 $m.s^{-1}$, fournit un courant électrique d'intensité I. Des considérations physiques et mécaniques conduisent à modéliser :

1. Le moment du couple sur l'axe de rotation par le terme $c_0 v(t) - c_1 u(t)$ avec $c_0 > 0$ et $c_1 > 0$.
2. Le moment de liaison sur l'axe de rotation dû à la présence de frottements par le terme $-c_2 - c_3 u(t)^2$ avec $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$.
3. Le moment des forces exercées sur l'axe de rotation dues au courant généré par l'alternateur par le terme $-c_4 u(t)$ avec $c_4 > 0$.

En appliquant la loi scalaire du moment cinétique à l'hélice en rotation autour de son axe dans le référentiel lié à son support (supposé galiléen (Galilée, 1564-1642, mathématicien, physicien et astronome italien), on détermine l'équation différentielle (de Ricatti (Jacopo Francesco Riccati, 1676-1754 et son fils Vincenzo Riccati, 1707-1775, mathématiciens italiens)) vérifiée par u où $J \quad [kg \cdot m^2]$ désigne le moment d'inertie de l'hélice autour de son axe :

$$J \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -c_2 + c_0 v(t) - (c_1 + c_4) u(t) - c_3 u(t)^2$$

En regroupant certains termes et en supposant l'hélice à l'arrêt au temps $t = 0$, on aboutit alors à un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} \forall t \in]0, T], \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

où f est la fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f : (t, x) \mapsto f(t, x) = a(t) + bx + cx^2$, T est la durée prise égale à 100 secondes et où les données numériques, correspondant à des paramètres physiques réels, seront prises égales à :

1. $a(t) = 0,055$ (dans le cas d'un vent de vitesse constante et égale à 25 $m.s^{-1}$).
2. $b = -0,04$.
3. $c = -0,0032$.

2.2.2 Solution analytique

Bien que l'équation différentielle en jeu ne soit pas linéaire, il est ici possible de calculer assez facilement et de manière explicite la solution du problème (1.7). Elle est donnée par

$$u : t \mapsto u(t) = \frac{55\left(e^{0,048t} - 1\right)}{4\left(11e^{0,048t} + 1\right)} \tag{1.8}$$

Donnons quelques indications sur la manière d'obtenir cette solution. Tout d'abord, on commence par chercher une solution particulière constante et positive à l'équation différentielle

$$u'(t) = 0,055 - 0,04u(t) - 0,0032u^2(t)$$

ce qui revient à résoudre l'équation du second degré

$$-0,0032x^2 - 0,04x + 0,055 = 0$$

qui possède comme solution réelle positive $x = 1,25$.

Posons ensuite le changement de variable $y(t) = u(t) - 1,25$. On montre sans difficulté l'équivalence

$$u'(t) = 0,055 - 0,04u(t) - 0,0032u^2(t) \Longleftrightarrow y'(t) = -0,048y(t) - 0,0032y(t)^2$$

et on cherche alors à résoudre la nouvelle équation différentielle d'inconnue y. Pour cela, il suffit de poser le changement de variable $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ après avoir justifié que la fonction y ne s'annule pas. Or, $y(t) = 0 \Longleftrightarrow u(t) = 1,25$ donc, puisque l'on cherche une solution u autre que la solution constante $t \mapsto 1,25$ déjà trouvée, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que la solution constante $t \mapsto 1,25$ est la seule qui prenne la valeur 1,25. Par conséquent (comme on cherche une solution non constante) la fonction y ne peut pas s'annuler et le changement de variable $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ est bien défini. Un calcul simple montre alors que

$$y'(t) = -0,048y(t) - 0,0032y(t)^2 \Longleftrightarrow z'(t) = 0,048z(t) + 0,0032$$

et cette dernière équation différentielle du premier ordre à coefficients constants admet des solutions bien connues sous la forme

$$z(t) = K\mathrm{e}^{0{,}048t} - \frac{1}{15}$$

Le calcul de la constante K est donné par la condition initiale

$$u(0) = 0 \iff y(0) = -1{,}25 \iff z(0) = -0{,}8$$

et fournit $K = -\dfrac{11}{15}$. Finalement, on obtient

$$z(t) = -\frac{11}{15}\mathrm{e}^{0{,}048t} - \frac{1}{15}$$

et il reste ensuite à revenir à la fonction initiale u pour trouver, après plusieurs simplifications, pour $t \in [0, 100]$

$$u(t) = \frac{55\left(\mathrm{e}^{0{,}048t} - 1\right)}{4\left(11\mathrm{e}^{0{,}048t} + 1\right)}$$

2.2.3 Solution numérique

Envisageons maintenant de calculer numériquement une solution approchée au problème de Cauchy de l'éolienne avec le logiciel *Scilab* :

$$\begin{cases} \forall t \in]0, 100], & u'(t) = f\big(t, u(t)\big) = 0{,}055 - 0{,}04u(t) - 0{,}0032u^2(t) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

L'algorithme, écrit dans l'éditeur *SciNotes* intégré à *Scilab*, peut prendre la forme suivante.

```
//problème de l'éolienne
//durée du calcul
T=100;
//condition initiale
t0=0;u0=0;
//déclaration de la fonction f
function uprime=f(t, u)
    uprime=0.055-0.04*u-0.0032*u.^2;
endfunction
//déclaration des noeuds de calculs
N=50;
t=linspace(0,T,N);
//résolution approchée du problème
u=ode(u0,t0,t,f);
//solution exacte
y=(55/4)*(exp(0.048*t)-1)./(11*exp(0.048*t)+1);
//représentation graphique
plot(t,u,'k',t,y,'k:');
legend(['Sol. app.','Sol. exacte']);
```