Chapitre 1

Les signaux

1.1 MATHÉMATIQUES ET SIGNAL

L'homme appréhende les phénomènes qui l'entourent par l'intermédiaire des signaux qu'il reçoit. Ces signaux, il les détecte par l'intermédiaire de ses capteurs qui sont les « cinq sens ». Chaque capteur possède ses caractéristiques : l'oreille ne peut entendre des sons haute fréquence ($> 10kHz$), l'œil n'est sensible qu'à certaines couleurs (impossible de voir directement l'ultraviolet ou l'infra-rouge). Grâce à son intelligence et à son travail, l'homme a développé des instruments, les capteurs, qui vont lui permettre de « voir » d'autres signaux auxquels ses cinq sens n'étaient pas sensibles. Mais le travail ne s'arrête pas à la simple conception d'un instrument et à constater l'existence d'un phénomène, il faut aussi savoir interpréter ces signaux, les traiter. L'une des approches les plus fécondes consiste à faire appel aux mathématiques. Celles-ci vont proposer les objets abstraits que sont les modèles de signaux qui rendent compte plus ou moins fidèlement de ce qui est observé. Arriver à modéliser un signal, c'est le rôle de l'expérimentateur ; les mathématiques vont proposer un certain nombre de techniques ou méthodes permettant de travailler sur les modèles. Ces méthodes permettent de rendre les choses prévisibles sans être obligé d'avoir recours en permanence à l'expérience ; elles fournissent des interprétations de phénomènes mais aussi des mises au point d'instruments par ce que l'on peut appeler de la simulation. La validité de ce que l'on appellera la théorie doit bien entendu être en final confrontée à l'expérience. Un ingénieur, un scientifique se doivent de posséder une culture mathématique suffisante pour pouvoir utiliser intelligemment les outils qui sont créés en permanence par les mathématiciens.

Comment définir un signal ?

Un signal est, au sens large, une grandeur physique accessible à la mesure par l'intermédiaire d'un capteur. En général, un signal dépend des coordonnées d'espace et du temps soit, $\{x, y, z, t\}$.

Nous attribuons à un signal des propriétés élémentaires comme l'intensité, la puissance, l'énergie,... Ce sont ces grandeurs auxquelles sont sensibles les capteurs qui constituent l'instrument de mesure du signal.

Un capteur mesure l'un des aspects du signal par exemple :
- signal électrique : intensité (ampères), tension (volts), etc. ;
- signal thermique : intensité ($°C$, Kelvin), énergie (calories ou joules) ;
- signal lumineux : intensité (lumens), énergie (joules) ;
- mélange chimique : concentration (mol/l), acidité (pH) ;
- signal magnétique (teslas) ;
- signal barométrique (hectopascals) ;
- vitesse d'un mobile ($m/s, rd/s$) ; accélération (m/s^2) ;
- ...

Les capteurs sont aussi en général des transducteurs c'est-à-dire qu'ils transforment la grandeur physique étudiée en une autre grandeur physique le plus souvent proportionnelle et plus aisée à traiter avec les outils modernes d'où la grande vogue des signaux électriques tensions ou courants.

Le point de vue mathématique

À un signal sera associée une suite de nombres (réels, complexes, booléens,etc.) qui dépendra d'autres variables. Le point de vue algébrique propose de le représenter par une fonction des coordonnées d'espace-temps soit :

$$\text{signal} \rightarrow f(x, y, z, t)$$

Une approche simplifiée

La modélisation du signal peut se faire grâce à des fonctions mathématiques plus ou moins compliquées décrivant la manière dont le signal évolue dans l'espace et le temps. Pour l'étude d'un signal en un point de l'espace la fonction sera $f(t)$, uniquement dépendante du temps. Si le signal est une image statique, formée par exemple sur une barrette CCD, la fonction devient $f(x)$, $f(x, y)$ s'il s'agit d'une image statique, $f(x, y, z)$ pour une image à 3 dimensions (hologramme,etc.). Si ces images sont animées on retrouve soit $f(x, t)$, soit $f(x, y, t)$, soit $f(x, y, z, t)$.

L'étude du signal de manière élémentaire se fait sur des fonctions d'une seule variable $f(t)$ ou $f(x)$. La généralisation à plusieurs dimensions utilise les mêmes concepts, seule est ajoutée un peu de complexité.

— < *Avertissement* > —

Dans cet ouvrage d'initiation seuls seront traités les signaux continus périodiques ou non. Ils seront supposés dépendant d'une seule variable qui, pour suivre l'usage, sera le temps t. La transposition à d'autres variables est triviale et le passage à plusieurs variables se fait naturellement lorsque les bases sont bien acquises.

Pour suivre l'usage de la communauté du signal, la notation générale adoptée pour des signaux sera ainsi plutôt :

$$x(t),\ y(t), \dots$$

1.2 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Les signaux sont classables selon des grands groupes de propriétés.

Signaux déterministes

Ces signaux sont mesurables avec certitude et, si nous sommes capables de réaliser au même instant t_0 plusieurs mesures du signal, le résultat sera le même quelle que soit la mesure prise en compte. Soit $x_i(t_0)$ la i^{e} mesure :

$$x_i(t_0) = x(t_0) \quad ; \quad \forall i$$

Les techniques mathématiques étudiées dans ce cours s'adressent spécialement à l'étude des signaux déterministes.

Signaux aléatoires

Contrairement au cas précédent, plusieurs mesures $x_i(t_0)$ ne donnent pas le même résultat. Celui-ci dépend plus ou moins du hasard nous obtenons un résultat statistique. L'étude de tels signaux n'est pas l'objet de ce livre bien que certaines techniques ici présentées s'adaptent directement à leur étude.

Signaux continus

La notion de continuité sert à décrire les phénomènes qui ne changent pas de valeur brutalement mais évoluent progressivement. Intuitivement, une fonction dont on peut dessiner le graphe (donc à variable réelle) est continue si son graphe peut être dessiné sans lever le crayon. Plus mathématique, une fonction continue en un point est telle :

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$$

elle est continue sur l'intervalle $I = [a\ ;\ b]$ si elle est continue pour tout $t \in I$.

En traitement du signal cette notion est trop restrictive et on admet de classer dans les signaux continus des signaux possédant des discontinuités de première espèce définies par une limite à droite $x(t_0^+)$ et une limite à gauche $x(t_0^-)$ différentes[1] :

$$\varepsilon \geqslant 0 \quad ; \quad \left.\begin{array}{lcl} \text{limite à droite} \quad x(t_0^+) & = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t_0 + \varepsilon) \\ \text{limite à gauche} \quad x(t_0^-) & = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t_0 - \varepsilon) \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Par essence, les signaux liés aux phénomènes naturels sont de type continu. Les signaux continus sont aussi appelés en ingénierie des signaux analogiques, terme qui provient de l'électronique et des montages permettant de générer et traiter de tels signaux.

Signaux discrets

Par opposition au signal continu, le signal discret n'est connu qu'en un certain nombre de points constituant une suite discrète de mesure nulle :

$$\{t_i\} \;\to\; \{x(t_i)\}$$

La suite $\{t_i\}$ peut comporter un nombre infini d'éléments, la seule condition est que la suite soit de mesure nulle[2].

Signaux périodiques

Ils peuvent être continus ou discrets, ils sont caractérisés par leur période T telle que :

$$x(t + n\,T) = x(t)\ ;\ n \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

1.3 SIGNAUX CONTINUS DÉTERMINISTES

1.3.1 Définition

Les notions de base ont été introduites à la page 3 et nous adopterons la définition :

—— < *Signal continu* > ——

Un signal continu est le résultat d'une mesure définie sur un ensemble de points mesurable fini ou non[3]*.*

Ainsi que nous l'avons indiqué ci-dessus, nous nous contenterons d'étudier des signaux dépendant d'une seule variable d'espace qui sera le temps t. La variable est réelle donc définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ mais le résultat de la mesure peut être défini sur $\mathbb{R}$ ou de manière plus générale sur $\mathbb{C}$.

---

1. $x(t_0^+)$ est aussi appelée la limite par valeurs supérieures et $x(t_0^-)$ la limite par valeurs inférieures.
2. Notion mathématique rappelée en annexe, page 268.
3. Un ensemble infini de points qui ne constitue pas un segment est non mesurable. Voir annexe, page 268.

1.3.2 Signaux élémentaires

La description des signaux continus est réalisée à partir de fonctions simples que l'on peut associer pour obtenir des descriptions plus complexes. Ces signaux élémentaires sont rappelés dans la table 1.1.

Échelon d'Heaviside	$e(t)$	$\begin{cases} = 1 & \text{pour } t > 0 \\ = 0 & \text{pour } t < 0 \\ \text{non défini} & \text{pour } t = 0 \end{cases}$
Puissance	αt^n	$\alpha \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$
Exponentielle réelle	$e^{\alpha t}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Exponentielle complexe	$e^{\beta t}$	$\beta \in \mathbb{C}$
Sinus-cosinus	$a\cos(\omega t + \phi)$	$\{a,\ \omega,\ \phi\} \in \mathbb{R}$

TABLE 1.1 – Signaux continus élémentaires.

L'échelon d'Heaviside $e(t)$ permet de définir deux fonctions équivalentes par translation, la fonction rectangle $\mathrm{rect}(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$, représentées sur la figure 1.1 et définies dans la table 1.2.

Elles sont reliées par la relation de translation :

$$\Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \mathrm{rect}\left[\frac{t - a/2}{a}\right] = \mathrm{rect}\left[\frac{t}{a} - \frac{1}{2}\right]$$

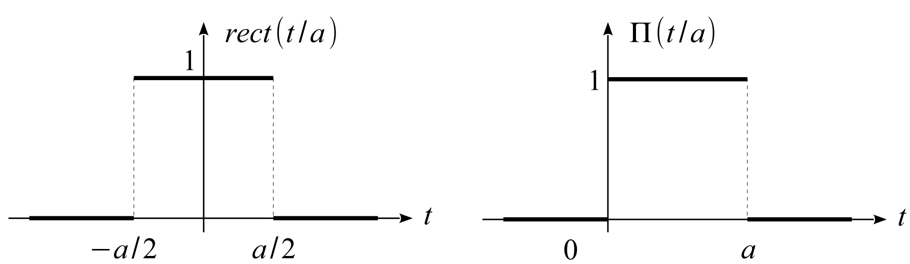

FIGURE 1.1 – Fonctions rectangle et porte.

$\mathrm{rect}(t)$	$\begin{cases} = 1 & t \in]-1/2\ ;\ 1/2[\\ = 0 & t \notin]-1/2\ ;\ 1/2[\\ \text{non défini} & t = \{-1/2\ ;\ 1/2\} \end{cases}$	$=$	$e(t+1/2) - e(t-1/2)$
$\mathrm{rect}(t/a)$	$\begin{cases} = 1 & t \in]-a/2\ ;\ a/2[\\ = 0 & t \notin]-a/2\ ;\ a/2[\\ \text{non défini} & t = \{-a/2\ ;\ a/2\} \end{cases}$	$=$	$e(t+a/2) - e(t-a/2)$
$\Pi(t)$	$\begin{cases} = 1 & t \in]0\ ;\ 1[\\ = 0 & t \notin]0\ ;\ 1[\\ \text{non défini} & t = \{0\ ;\ 1\} \end{cases}$	$=$	$e(t) - e(t-1)$
$\Pi(t/a)$	$\begin{cases} = 1 & t \in]0\ ;\ a[\\ = 0 & t \notin]0\ ;\ a[\\ \text{non défini} & t = \{0\ ;\ a\} \end{cases}$	$=$	$e(t) - e(t-a)$

TABLE 1.2 – Fonctions rectangle et porte.

Limitation d'un signal sur un intervalle

Les fonctions $e(t)$, $\mathrm{rect}(t)$, $\Pi(t)$ sont très utiles pour définir un signal $x(t)$ nul en dehors d'un intervalle $[t_1\ ;\ t_2]$ et confondu sur cet intervalle avec un signal $g(t)$ connu :

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} g(t) & ;\quad t \in]t_1\ ;\ t_2[\\ 0 & ;\quad t \notin]t_1\ ;\ t_2[\end{cases} \\ x(t) &= \begin{cases} g(t) \times [e(t-t_1) - e(t-t_2)] \\ g(t) \times \Pi\left[\dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}\right] \\ g(t) \times \mathrm{rect}\left[\dfrac{t-(t_1+t_2)/2}{t_2-t_1}\right] \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette opération, appelée *troncature*, est illustrée par les deux exemples de la figure 1.2

Remarque :
Lorsque l'opération de troncature introduit dans le signal une ou des discontinuités de première espèce, pour ces points la valeur du signal est non définie et, conformément à la relation (1.1), nous ne connaissons que les limites à gauche et à droite.

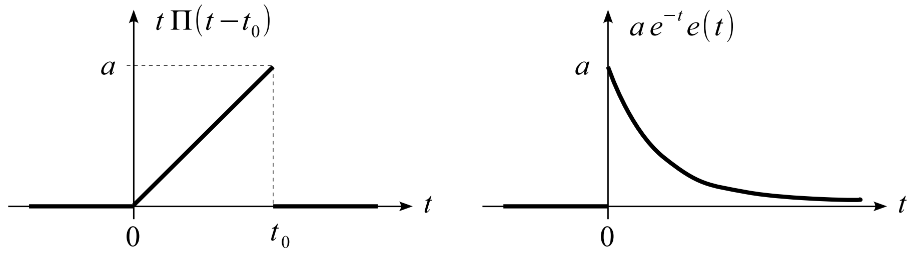

FIGURE 1.2 – Signaux limités dans l'espace.

1.3.3 Causalité

C'est une notion importante en traitement du signal qui permet de modéliser le fait qu'un signal a un début pris par convention comme étant l'instant 0, la figure 1.2 représente deux signaux causaux.

—— < *Signal causal* > ——

Un signal causal est un signal nul pour $t < 0$.
Un signal causal n'a de valeurs non nulles que pour $t \in \mathbb{R}^+$.
Un signal causal est de la forme générale : $x(t) = g(t)\; e(t)$

Le début d'un signal peut avoir lieu non pas en $t = 0$ mais en $t = t_0 > 0$. Il s'agit dans ce cas d'un signal causal retardé dont la modélisation entre dans le cadre général des signaux retardés.

Par complément, nous définissons un signal anticausal par :

—— < *Signal anticausal* > ——

Un signal anticausal est un signal nul pour $t > 0$.
Un signal anticausal n'a de valeurs non nulles que pour $t \notin \mathbb{R}^+$.
Un signal anticausal est de la forme générale : $x(t) = g(t)\; e(-t)$

La causalité amène la décomposition générale d'un signal quelconque en deux parties :

$$\begin{array}{rrcll}
\text{partie causale} & x^+(t) & = & x(t)\; e(t) & = \left\{ \begin{array}{ccc} x(t) & t & > 0 \\ 0 & t & < 0 \end{array} \right. \\
\text{partie anticausale} & x^-(t) & = & x(t)\; e(-t) & = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & t & > 0 \\ x(t) & t & < 0 \end{array} \right. \\
\text{signal} & x(t) & = & x^+(t) + x^-(t) &
\end{array} \tag{1.4}$$

Cas des signaux périodiques

Par construction, un signal périodique ne peut être causal [1].

1.3.4 Signal stable

Intuitivement, la notion de stabilité d'un signal est liée à la propriété de convergence ou divergence du signal lorsque $t \to +\infty$. Nous pouvons envisager plusieurs cas :

- signal asymptotiquement stable si $\lim_{t\to\ +\infty} |x(t)| = 0$.
  Par exemple $e^{-at}e(t)\ ;\ a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- signal instable si $\lim_{t\to\ +\infty} |x(t)| = +\infty$. Par exemple $e^{at}e(t)\ ;\ a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- qu'advient-il des signaux comme $e(t)$; $e^{j\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R}; \ldots$ tels que $\lim_{t\to\ +\infty} |x(t)| = A \neq 0$ borné ?
- que dire des signaux comme $a\cos(\omega t + \phi)\ e(t)\ ;\ a, \omega, \phi \in \mathbb{R}^{+}$ qui sont bornés mais n'ont pas de limite définie ?
- pourquoi envisager la limite lorsque $t \to\ +\infty$ et non celle $t \to\ -\infty$. Par exemple $e^{-at}\ ;\ a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\lim_{t\to\ -\infty} x(t) = +\infty$ est-il un signal stable ?

Les mathématiques proposent une définition rigoureuse de la stabilité asymptotique en utilisant la définition (A.8) de la page 274 :

— < *Signal asymptotiquement stable* > —

Un signal est asymptotiquement stable s'il appartient à $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des signaux absolument sommables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\ dt < +\infty} \tag{1.5}$$

La relation 1.5 implique bien une condition nécessaire : $\lim_{t\to\pm\infty} |x(t)| = 0$ ce qui inclut bien la stabilité asymptotique telle que nous l'avons pressentie intuitivement. Compte tenu de cette définition :

1. $x(t) = a\cos(\omega t + \phi)$: le fait que l'amplitude soit constante peut faire passer ce type de signal pour un signal stable. Au sens de la définition ce n'est pas un signal stable. Ceci est conforme à la théorie des oscillateurs où, pour obtenir un tel signal, il faut amener un système à l'instabilité en s'arrangeant pour que son amplitude reste constante ce qui est obtenu par l'introduction de non-linéarités.
2. $x(t) = 1$. Ce cas est plus ambigu. Quoi de plus stable qu'une constante ? Or, en appliquant la définition, ce signal n'est pas stable. Par contre

1. Il existe des signaux du type $x(t) = a\cos(\omega t + \phi)\ e(t)$ qui sont causaux et sont considérés par certains auteurs comme étant « périodiques » sur $\mathbb{R}^+$. Il s'agit bien sûr d'une commodité de langage.