Concours Professeur des écoles

Annales et sujets inédits corrigés
Épreuves écrites

Français et Mathématiques

Annie Grewis
Professeure de mathématiques à l'ESPE de l'Académie de Strasbourg
Isabelle Lebrat
Professeure de lettres à l'ESPE de l'Académie de Strasbourg
Catherine Millécamps
Professeur de lettres
Éric Tisserand
Directeur adjoint à l'ESPE de l'Académie de Strasbourg

Sous la direction de
Éric Tisserand

Sup'FOUCHER

ISBN 978-2-216-12941-6 (nouvelle édition)
ISBN 978-2-216-12464-0 (1re édition)

Sommaire

Sommaire

*** Sujets, travail préalable et corrigé à télécharger sur www.editions-foucher.fr**

Retrouvez les savoirs disciplinaires, la didactique, la méthodologie des épreuves écrites ainsi que d'autres sujets corrigés dans les ouvrages de préparation à l'épreuve écrite Foucher : Français, Mathématiques.

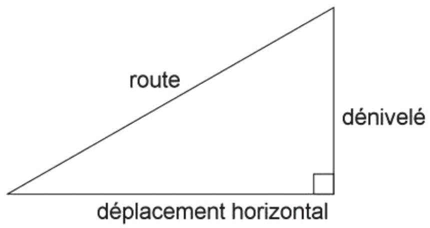
Mathématiques - Annale 2014 – groupe 2 : Problème sur la descente de Kitzbühel ; 4 exercices ; proportionnalité (cycle 3)

Première partie (13 points)

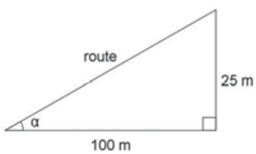
Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel.
Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

A. La montée à la station

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25 %. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25 % indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1. Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

2. Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

B. Ski sur la Streif

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

- Longueur totale : 3 312 m
- Pente maximale : 85 %
- Pente minimale : 5 %
- Dénivelé : 862 m

1. Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08 s.

Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.

2. Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h.

S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

C. Saut sur la Streif

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.

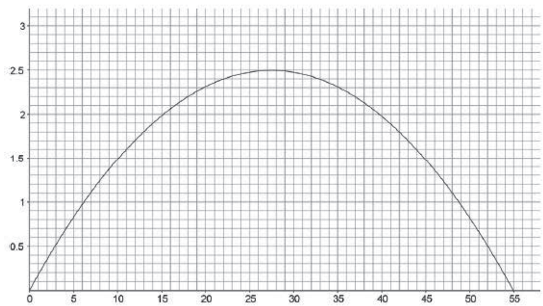
On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction S suivante :

$$S : x \mapsto 2{,}5 - \frac{(2x - 55)^2}{1210},$$

x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

1. Calculer l'image de 10 par la fonction S. Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.

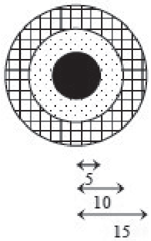
2. On a tracé la courbe représentative de cette fonction S.



a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?
b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. À quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?
3. À l'aide de l'expression de la fonction S, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

D. Tir à la carabine

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-après.



Les mesures des rayons ci-dessus sont en centimètres
Un débutant touche la cible une fois sur deux.
Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.
1. Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?
2. Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

Deuxième partie (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

En classe de CM2, un professeur propose l'exercice suivant :

> Mathis a effeuillé des fleurs à 5 pétales en disant « j'aime les maths… un peu…, beaucoup…, passionnément…, à la folie ». Il a ôté 83 pétales en tout. Il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente.
> Combien de fleurs a-t-il effeuillées en totalité ? Sur la dernière fleur qu'il a effeuillée, reste-t-il des pétales ?

1. De quelle opération mathématique ce problème relève-t-il ?
2. Proposer trois procédures possibles pour répondre à la question posée.

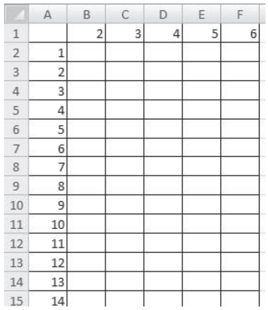
8 Maths sujet

Exercice 2

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.

1. Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.

2. Pour vérifier sa réponse, Jules décide d'utiliser un tableur. Pour cela, il utilise la fonction MOD (nombre ; diviseur), qui donne le reste de la division euclidienne du nombre par le diviseur. Jules a prévu de calculer en colonne les restes de la division euclidienne des nombres de la colonne A par 2, 3, 4, 5 et 6.



	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

a) Parmi les formules suivantes, en choisir une qui pourrait être insérée dans la cellule B2 et qui pourrait, en étant étendue vers le bas, compléter correctement la colonne B :

MOD (1 ; 2)	MOD (A2 ; B1)	MOD (A2 ; 2)
MOD (1 ; B1)	MOD (A2 ; B$1)	MOD (2 ; 1)

b) Jules a rempli de la même façon le reste du tableau. Comment peut-il l'utiliser pour résoudre ce problème ?

Exercice 3

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$

$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$

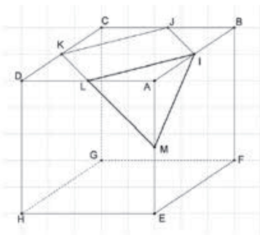
1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube de côté 12 cm.

On note I le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD] et M celui de [AE].



1. Démontrer que IJKL est un carré.

2. Calculer l'aire du carré IJKL (en cm^2).

3. AILM est une pyramide à base triangulaire. Calculer le volume de cette pyramide (en cm^3).

Rappel : volume d'une pyramide = $\frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur

4. On ôte au cube en chacun de ses huit sommets une pyramide identique à AILM pour créer un nouveau solide. Vérifier que le volume de ce nouveau solide est 1 440 cm^3.

Troisième partie (14 points)

Un enseignant traite la proportionnalité avec des élèves de cycle 3.
A. L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [...]) reste à préciser :

> Pour une visite du Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 25 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe.
> [...]
> Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?

1. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.
2. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.
B. L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité ci-dessous à partir de celle proposée dans le manuel *Outils pour les maths - CM1*, Magnard, édition 2011 :

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.

Exemple 1 : ***1 kg de pêches coûte 3 €.***

Nombre de kg de pêches	1	2	5
Prix (en €)	3	6	15

Le prix est proportionnel à la masse .
Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).

Exemple 2 : ***4 gâteaux coûtent 6 €.***
Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double. → 6 × 2 = 12 €
Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié. → 6 divisé par 2 = 3 €

Exemple 3 : ***1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.***
Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas **3 fois plus cher** qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.
Cette situation n'est pas proportionnelle.

1. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?
2. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?

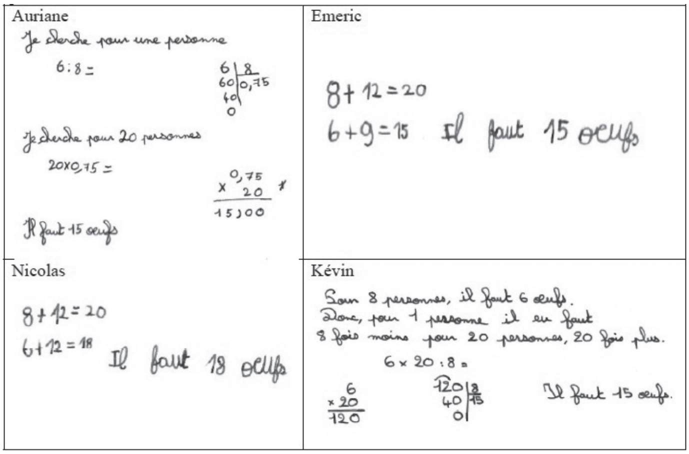
3. Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents.
Expliciter ces différents rôles.

4. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

C. L'enseignant propose un autre exercice :

> Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
> Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
> Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

Analyser les quatre productions des élèves ci-dessous, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.



D. L'enseignant propose un dernier exercice :

> Dans une ville, il y a deux médiathèques.
> Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. À cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants :
> – à la médiathèque Jean JAURÈS, on peut trouver 5 000 ouvrages dont 40 % de romans ;
> – à la médiathèque George SAND, on peut trouver 4 000 ouvrages dont 60 % de romans.
> Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.

1. Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ?

2. Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun.

Paul dit : « J'ai trouvé 50 % parce que c'est exactement entre 40 % et 60 % ».
a) Quelle erreur de raisonnement Paul commet-il ?
b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5 000 pour que 50 % soit la bonne réponse ?
Justifier la réponse.

Corrigé

Travail préalable

1. S'approprier le sujet

Ce sujet peut être considéré comme assez facile. Il porte sur des notions élémentaires et variées du programme ; les questions sont, pour la plupart, indépendantes.

Partie 1 – Ce problème porte sur la descente mythique de Kitzbühel dans les Alpes autrichiennes. Les 4 parties, indépendantes, permettent de tester vos connaissances en trigonométrie, vos compétences à effectuer des calculs de durée dans le système sexagésimal, de vitesse, à lire une représentation graphique et à rechercher algébriquement un maximum. La dernière partie porte sur des calculs de probabilités dans un contexte de tirs sur une cible circulaire.

Partie 2 – Elle comporte 4 exercices de mathématiques.

– **L'exercice 1** concerne un problème de division de CM2 dans un contexte original. Il s'agit d'une adaptation de la comptine connue de l'effeuillage des marguerites… censée mesurer la chaleur des sentiments : « Je t'aime » (on retire 1 pétale) - « un peu » (on ôte un 2e pétale) - « beaucoup » (3) - « passionnément » (4) - « à la folie » (5) - « pas du tout » (6). Il donne l'occasion de vérifier chez le candidat ses propres connaissances scientifiques de la division ainsi que ses compétences à anticiper les diverses procédures de résolution envisageables chez des élèves de cours moyen.

– **L'exercice 2** porte également sur un problème de « vie ordinaire ». Il requiert des connaissances sur la notion de multiple d'un entier donné (ou critères de divisibilité) et sur l'utilisation d'un tableur.

– **L'exercice 3** vise à émettre une conjecture sur le résultat d'un calcul puis à la prouver.

– **L'exercice 4** porte sur des notions en géométrie plane et dans l'espace ainsi que sur celles du domaine des grandeurs qui y sont attachées (nature d'un quadrilatère, calcul d'aires et de volumes).

Partie 3 – Elle porte sur l'étude de la proportionnalité au cycle 3. Les sous-titres des quatre sous-parties ne sont pas mentionnés ; néanmoins, on discerne assez vite qu'il s'agit, dans l'ordre : de compléter un énoncé de sorte qu'il traduise, ou non, une situation de proportionnalité, d'analyser une trace écrite (phase d'institutionnalisation) puis des productions et enfin un exercice à destination des élèves portant sur les pourcentages.

2. Mobiliser ses connaissances

Partie 1

La **partie A** amène à utiliser les rapports de trigonométrie pour déterminer la mesure d'un angle et une longueur. Vous devez savoir que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle α est égale à « côté opposé à α / côté adjacent à α ». Si on sait que $\tan\alpha = a$, pour trouver la valeur de α, on frappe à la calculatrice « $\tan^{-1} a$ » (parfois touche « inv » puis « tan »). Quand on utilise la trigonométrie, les valeurs numériques obtenues sont le plus souvent des valeurs approchées.

La **partie B** conduit à convertir des temps dans le système sexagésimal (1 h = 60 min = 3 600 s) pour calculer une durée par soustraction (on peut aussi procéder par recherche du complément : temps de départ + ...= temps d'arrivée). L'énoncé contient des données inutiles (1 seule caractéristique de la piste est utile).

La **partie C** porte sur la lecture et l'interprétation d'un graphique représentant une fonction (polynôme du 2nd degré) qu'il faudra étudier pour déterminer son maximum (question classique dans le cas d'une parabole) puis sur une résolution algébrique (vous aurez besoin d'appliquer la règle : entre nombres positifs, une différence est maximale quand le second terme est nul).

La **partie D** met en œuvre la formule de l'aire d'un disque (πR^2) et des connaissances sur les probabilités : généralement, quand on tire sur une cible, la probabilité d'atteindre une zone donnée est le rapport « aire de la surface favorable/aire totale » (la surface favorable étant celle qu'on souhaite atteindre). La probabilité d'avoir « touché la cible ET atteint une zone donnée » s'obtient en multipliant les probabilités de chacun de ces deux événements.

Partie 2

Dans l'exercice 1, vous devez savoir que la division euclidienne de l'entier naturel a par l'entier naturel b non nul est l'opération qui permet de déterminer les deux entiers naturels q et r tels que :

$a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$ (a est le dividende, b le diviseur, q le quotient entier et r le reste).

Pour déterminer q et r, on peut aussi encadrer le dividende par deux multiples consécutifs du diviseur : $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$; $r = a - b \times q$.

Selon le niveau de classe, les démarches de résolution des problèmes diffèrent : elles passent progressivement de procédures n'utilisant pas le nombre (dessins et schémas) à des procédures numériques s'appuyant sur les résultats mémorisés (tables) et les opérations connues.

Dans l'exercice 2, vous aurez à calculer le plus petit multiple commun (ppcm) à plusieurs nombres décomposés en produits de facteurs premiers (on multiplie tous les facteurs qui apparaissent dans l'une ou l'autre des décompositions en les affectant du plus grand exposant sous lequel ils figurent).

Vous devrez faire état de connaissances élémentaires concernant l'utilisation d'un tableur (choix d'une formule à entrer dans une cellule pour remplir un tableau par la fonction de recopie).

Dans l'exercice 3, après avoir désigné des entiers consécutifs à l'aide de « lettres » (n ; (n + 1) ; (n + 2), ...) , vous aurez à développer les deux premières identités remarques :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Dans l'exercice 4, vous reconnaîtrez probablement des configurations « classiques ». Il vous faut connaître les propriétés caractéristiques du carré, le théorème des milieux (si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté) et savoir appliquer une formule donnée (volume d'une pyramide).
Partie 3
Vous mobiliserez les connaissances habituelles visées par les sujets portant sur l'apprentissage de la proportionnalité : concept de coefficient de proportionnalité (rapport constant entre les nombres des deux grandeurs), règle de trois, utilisation des propriétés additive et multiplicative de linéarité (raisonnements s'appuyant sur les relations arithmétiques (doubles, moitié, etc.) entre les nombres... justement choisis dans cet objectif).

Retrouvez la copie du candidat sur www.editions-foucher.fr.