Concours
Professeur des écoles

Épreuve écrite de
Mathématiques

Annie Grewis
Professeur de mathématiques à l'ESPE de l'Académie de Strasbourg

Corinne Jaeck
Professeur de mathématiques à l'ESPE de l'Académie de Strasbourg

Sous la direction de
Éric Tisserand

Sup'FOUCHER

« Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.
En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. »

ISBN 978-2-216-12843-3 (Nouvelle édition)
ISBN 978-2-216-12463-3 (1re édition)

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective et, d'autre part, les analyses et courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (loi du 1er juillet 1992 - art. 40 et 41 et Code pénal - art. 425).

© Éditions Foucher, Malakoff – 2014

Sommaire

© Éditions Foucher

Sommaire

* Les corrigés des exercices d'entraînement et des sujets 2 et 3 sont téléchargeables sur www.editions-foucher.fr

© Éditions Foucher

Méthodologie pour traiter l'analyse de supports d'enseignement et de productions d'élèves

1 Analyser des supports d'enseignement

Les supports possibles

Ils peuvent être variés, généralement il s'agit :
– d'exercices ou problèmes donnés aux élèves en classe ou aux évaluations ;
– de descriptifs de séances ou de séquences pédagogiques s'appuyant soit sur des extraits de manuels scolaires, soit sur des extraits de « livres du maître » ou de fiches de préparation de l'enseignant.

Éléments à prendre en compte

Dans ces questions, on vous demande en quelque sorte de « vous mettre à la place » d'un enseignant qui doit préparer des activités pour ses élèves (travail avant la classe) en respectant les instructions officielles.

- Analyse de l'activité a priori. Il vous faut principalement :

– déterminer le cycle et/ou le **niveau** de classe concerné(s) : votre connaissance des programmes (ou parfois le sujet lui-même) permet de répondre ;
– repérer la **notion** en jeu (notion de mesure de longueur, de proportionnalité…) : le titre du document fourni donne souvent une indication ;
– déterminer les **objectifs d'apprentissage** visés. Il peut s'agir d'activités orientées vers l'**approche**, la **construction** ou la **consolidation** de compétences spécifiques : les sous-titres des documents, la numérotation des pages du manuel fourni donnent souvent des informations à ne pas négliger ;
– dégager **les connaissances et les compétences** (être capable de…) dont l'élève doit disposer d'une part pour aborder cette activité (les pré-requis), d'autre part pour la réussir (savoir décrire une figure, savoir comparer deux nombres entiers, distinguer *aire* et *périmètre d'une surface*…) ;

© Éditions Foucher

– envisager les **procédures**, **démarches** ou stratégies possibles que l'élève peut mettre en œuvre pour réussir la **tâche** (succession « d'actions ») qui lui est demandée : cela suppose que vous l'exécutiez aussi, en vous plaçant au niveau de l'élève et en respectant les **consignes** (ou **instructions**) données ;
– dégager les principales **difficultés** que l'élève peut rencontrer : elles peuvent être liées à la notion étudiée, à la longueur d'un texte écrit, au fait que l'énoncé contient des données inutiles, à l'utilisation de papier non quadrillé en géométrie, etc. ;
– repérer les **variables didactiques** de l'activité : il s'agit des éléments de l'activité que l'enseignant choisit de faire varier dans le but d'amener des changements de procédures chez les élèves : il peut s'agir des valeurs numériques (« petits ou grands » nombres), de la nature des nombres (entiers ou décimaux), des instruments mis à disposition (calculatrice, ordinateur), de l'organisation du travail (par binôme, collectivement, individuellement), de la nature des objets (déplaçables ou non), etc.

• « Critique » de l'activité. Il est parfois demandé de juger de la pertinence de l'activité soumise à votre analyse : votre réponse doit faire référence à votre connaissance des programmes et non à votre « impression »... Par ailleurs, s'il s'agit d'extraits de manuels scolaires, restez pondéré : des pages de manuels ne permettent pas, à elles seules, de savoir comment l'enseignant met en œuvre l'activité dans sa classe – tout manuel scolaire est associé à un guide pédagogique donnant des conseils à ce niveau, et vous n'en disposez pas toujours.

2 Analyser des productions d'élèves

Les supports sont généralement des copies de travaux réels d'élèves (forme manuscrite). Dans un souci de lisibilité, il arrive parfois que les productions soient reproduites par typographie (dans ce cas, le sujet le précise).

Règles fondamentales

» Ne portez pas de jugement de valeur : les expressions « bon élève » « mauvais élève » – qui mettent en cause l'individu – n'ont ni leur place dans votre copie ni à l'école et à la formulation « bonne / ou mauvaise réponse » préférez l'expression : « réponse juste (correcte) / fausse (incorrecte) ».

» Les élèves ne font – ou n'écrivent – jamais « n'importe quoi ». Aussi, abstenez-vous de semblables remarques (de les écrire comme de les penser !) : toute erreur d'élève a sa « logique » et il vous est justement demandé de la déceler ou tout au moins de poser des hypothèses sur son origine.

» Évitez la surinterprétation. On vous demande de décrire les procédures des élèves ou de repérer les erreurs : soyez factuel, tout en utilisant les termes spécifiques appropriés.

© Éditions Foucher

Que signifie : « analyser des productions d'élèves » ?

On vous demande de jouer le rôle de tout enseignant qui corrige des productions d'élèves. Il doit être capable :
- d'identifier les réponses justes et les réponses erronées ;
- de repérer les procédures correctes et les procédures incorrectes ;
- de vérifier la cohérence entre la procédure utilisée par l'élève et sa réponse ;
- de décrire les démarches mises en œuvre ;
- de poser des hypothèses sur l'origine des erreurs ou difficultés qu'il observe – afin d'être en mesure d'apporter une aide aux élèves ayant échoué ou utilisé des stratégies différentes de celles attendues (remédiation).

+ d'infos Origines possibles des erreurs ou difficultés

L'élève n'étant pas présent, on est amené le plus souvent à poser des hypothèses sur les procédures qu'il a utilisées à partir des traces écrites fournies. Aussi, les expressions prudentes « il semble que… », « on peut penser que… » sont préférables à d'autres plus catégoriques (et peut-être traduisant des interprétations erronées de votre part !).

Les erreurs ou difficultés observées peuvent trouver leur(s) origine(s) :
- dans l'incompréhension de la situation décrite par l'énoncé ;
- dans l'incompréhension et le non respect de la consigne ;
- dans la non maîtrise de la notion présente dans l'activité (l'élève « ne sait pas que… » ou « ne sait pas comment… ») ;
- dans la **représentation** que l'élève se fait :
  - de la notion en jeu (un carré « posé sur un coin » n'est plus un carré mais – seulement - un losange)
  - de l'énoncé (le mot « plus » induit pour lui l'utilisation de l'addition, le mot « moins » celle de la soustraction)
  - de la tâche (pour résoudre un problème il faut faire une opération) ;
- dans l'utilisation d'un « **théorème en acte** » : l'élève utilise une règle ou une propriété qu'il croit toujours vraie alors que son champ de validité est réduit (« pour multiplier un nombre par 10, il faut lui ajouter un 0 » : cette règle est seulement vraie dans l'ensemble des entiers) ;
- dans la « fatigue » de l'élève après un effort de réflexion soutenu, on parle de **surcharge cognitive** : en fin de production, il commet des erreurs « incompréhensibles » au vu du travail fourni auparavant.
- Les représentations des élèves (et des enseignants) s'appuient sur leurs expériences scolaires réciproques, elles se fondent sur les règles du **contrat didactique** – concept qu'on doit à G. Brousseau (voir *fiche 3*). L'analyse des travaux des élèves nous renseignent efficacement sur ce contrat et ont permis, grâce notamment aux évaluations nationales, de pointer les difficultés des élèves qui y sont liées.

© Éditions Foucher

3 Conseils méthodologiques généraux

» Lisez d'abord toutes les questions qui vous sont posées puis revenez sur chacune pour souligner ou surligner un mot clé (niveau de classe, objectifs, connaissances, compétences, classer les productions, pour aborder, etc.). La lecture des documents sera plus efficace et vos réponses gagneront en précision.

» Lisez rapidement les documents joints (pages de manuel, travaux d'élèves…) pour en dégager la thématique). Veillez à lire attentivement les questions posées aux élèves : elles permettent de dégager les objectifs d'apprentissage (découverte, consolidation…) et les compétences visées (celles des programmes).

» Résolvez (au moins partiellement) chacun des exercices posés aux élèves.

» Tenez compte du contexte (évaluation, travail de groupe…)

» Dans la rédaction de vos réponses, soyez précis dans vos formulations.

Exemple

– un problème peut être un problème de découverte, de recherche, d'application…

– une procédure d'élève peut être figurative (dessin), schématique ou calculatoire (précisez l'opération) ;

– une décomposition d'un nombre peut être additive, multiplicative ou… ;

– une opération peut être posée en ligne ou en colonne ;

– l'élève peut commettre des erreurs de calcul (indiquez laquelle : de retenue, de table de multiplication…), de procédure, de conversion (mesures de grandeur)…

» Ne vous contentez pas de lister les variables didactiques : justifiez-les en précisant les changements de procédures attendues.

» Illustrez et argumentez votre propos en reprenant des éléments des supports donnés (indiquez-les en utilisant des guillemets).

© Éditions Foucher

Sujet 1

Épreuve écrite de mathématiques – Sujet zéro du Ministère

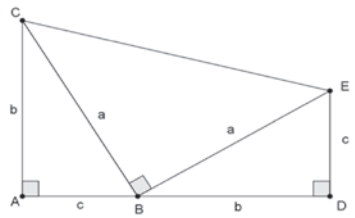
PREMIERE PARTIE
PROBLÈME
(13 points)
AUTOUR DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

L'objet de ce problème est la démonstration, par une méthode classique, du théorème de Pythagore, et son utilisation pour calculer des distances une situation concrète.
Ce problème comprend deux parties A et B. Ces deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, on désigne par Théorème de Pythagore l'énoncé suivant :
Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

PARTIE A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1831-1881), 20e président des États-Unis

Dans la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE, BCE sont rectangles respectivement en A, D et B. On pose : AB = DE = c ; AC = BD = b ; BC = BE = a.



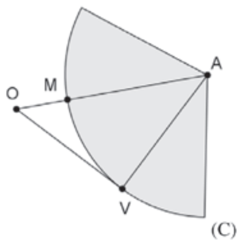
1. Justifier que les points A, B et D sont alignés
2. Justifier que le quadrilatère ADEC est un trapèze.
3. Exprimer de deux manières différentes l'aire du trapèze ADEC en fonction de a, b et c.
4. En déduire l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.

Partie B : une application du théorème de Pythagore

La courbure terrestre limite la vision lointaine sur Terre.
Plus l'altitude du point d'observation est élevée, plus la distance théorique de vision est grande.

Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre A de rayon 6370 km.
La figure 1 ci-dessous représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, qui ne respecte pas les échelles. (C) désigne le cercle de coupe, de centre A et de rayon 6370 km

Figure 1



© Éditions Foucher

Le point O représente l'emplacement des yeux d'un observateur. Le point M est le point d'intersection de la demi-droite [AO) et du cercle (C).
On considère que M se situe au niveau de la mer ; la longueur OM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de cet observateur.
La droite (OV) est tangente en V au cercle (C).
Le point V représente le point limite de vision de l'observateur. La longueur OV est appelée *portée visuelle théorique*.

1. Les points O, M et V étant définis comme ci-dessus, montrer que la portée visuelle théorique OV, exprimée en km, est donnée par la formule :

$$\mathrm{OV} = \sqrt{\mathrm{OM}^2 + 12740 \times \mathrm{OM}} \quad \text{où OV et OM sont exprimées en km.}$$

2. Calculer la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol (on arrondira au dixième de kilomètre près).

3. On considère la fonction f :

$$\mathrm{f} : h \mapsto \sqrt{h^2 + 12740h}$$

On a donc OV = f(OM), où OV et OM sont exprimées en km.
On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f

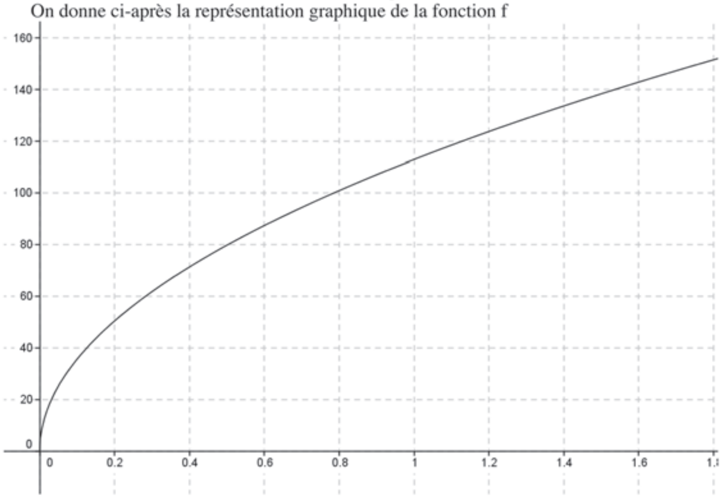


figure 2

En utilisant le graphique de la figure 2, répondre aux questions suivantes :

3.1 À quelle altitude doit-on se situer pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres ?

3.2 Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?

3.3 L'affirmation suivante est-elle vraie : « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » ?

© Éditions Foucher

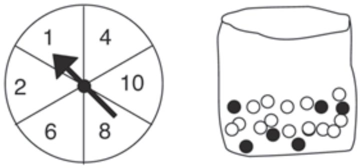
DEUXIEME PARTIE
(13 points)
Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, **si** la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans un sac.
La roulette et le sac sont représentés ci-contre.

Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.

Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?



D'après PISA M471Q01

EXERCICE 2.

Lors d'un tournoi de Bowling, on note les résultats des 15 joueurs.

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246

Le nombre maximal de point réalisable par un joueur est 300.

Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

EXERCICE 3.

La longueur officielle d'un marathon est 42,195 km.
Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course, elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

1. Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2 h 30 en tout. A-t-il raison ?
2. En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été 16 km / h et cette vitesse a chuté de 10% pour le restant du parcours.
   Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

EXERCICE 4

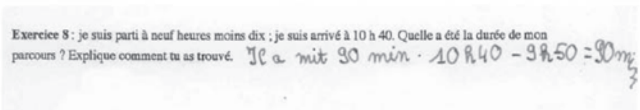
Le problème suivant a été proposé à des élèves.

Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10h40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé

1) Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé.

2) Pour chacune des deux productions d'élèves reproduites ci-dessous, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.

Thomas :


Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. Il a mit 90 min. 10 h 40 − 9 h 50 = 90 min

© Éditions Foucher

Kevin :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

9
-10
70
40
69

9h69

TROISIEME PARTIE
(14 points)
Analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves relevant de la proportionnalité

Cette partie vise l'analyse mathématique de plusieurs situations mettant en œuvre le concept de proportionnalité.
Pour répondre aux différentes questions, le candidat pourra se référer s'il le souhaite à l'extrait du document d'accompagnement des programmes de collège présenté dans l'**annexe 1**.

I. Situation A
Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

Énoncé A
À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

1-Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

2-Le problème a été proposé à 4 élèves, E1, E2, E3 et E4 dont les productions sont données en **annexe 2**. Pour chacun des 4 élèves
a. Expliquer, en argumentant à partir des traces écrites de l'élève, si la procédure qui semble avoir été utilisée témoigne d'une mise en œuvre correcte des propriétés mathématiques de la proportionnalité.
b. Émettre une hypothèse sur la cause des erreurs éventuelles.

3-D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire du nombre de sauts.
c. Expliciter cette fonction.
d. Donner la réponse attendue en utilisant cette fonction.

II. Situation B
Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

Énoncé B
6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

1-Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?
2-D'un point de vue mathématique, qu'est-ce qui différencie cet énoncé du précédent ?
3-Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune expliciter les propriétés mathématiques utilisées.

III. Situation C
En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves :

Énoncé C
Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.
1) Complète le tableau de valeurs suivant

Hauteur du prisme droit	*2 cm*	*3cm*	*4cm*	*5cm*	*6cm*	*10cm*
Volume du prisme droit						

2) Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau. [le professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit]
3) Que constates-tu ? vérifie avec ta règle.

1. Citer une nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence dans cet exercice.

© Éditions Foucher

2. Dans cet énoncé, c'est la hauteur du pavé droit qui varie. Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base, qu'est-ce que cela aurait changé ? Justifier.

IV. Situation D

Dans le document ressource « le nombre au cycle 3 » on trouve, au chapitre *proportionnalité*, les lignes suivantes :

> Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 [BO2008] au cycle 3 […] mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.
> Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

1. En quoi le problème ci-dessus est-il un problème de proportionnalité ?
2. Expliciter une procédure de résolution envisageable en grande section de maternelle.

Annexe 1

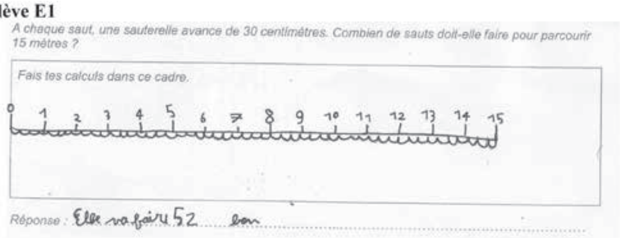
Extrait du document : Ressource pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, 3^e de collège
La proportionnalité au collège - EDUSCOL

Niveau	Cadres	Types de nombres	Procédures de résolution
Cycle 3	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples (rapport scalaire ou coefficient du type 1,5 ou 2,5…)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité « simple »
Sixième	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples - Quotients (plus le nombre pi)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité
Cinquième	Grandeurs Numérique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	Formulation et utilisation des propriétés : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité Coefficient de proportionnalité
Quatrième	Grandeurs Numérique Graphique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	- Utilisation des propriétés travaillées en 6^e et 5^e - Egalité de quotients et produits en croix - Caractérisation graphique (sans justification)
Troisième	Grandeurs Numériques Graphiques	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus les nombre π , $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots$)	- Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire - Les procédures envisagées antérieurement restent disponibles

Annexe 2

Production de quatre élèves en réponse à l'exercice A

Élève E1


A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

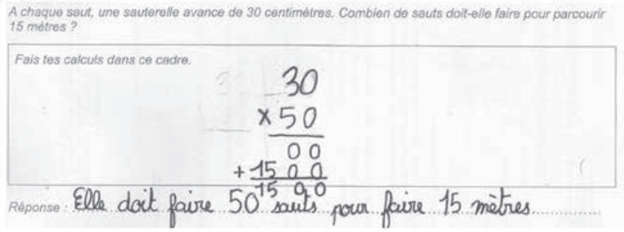
Fais tes calculs dans ce cadre.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Réponse : Elle va fair 52 bon

© Éditions Foucher

Élève E2

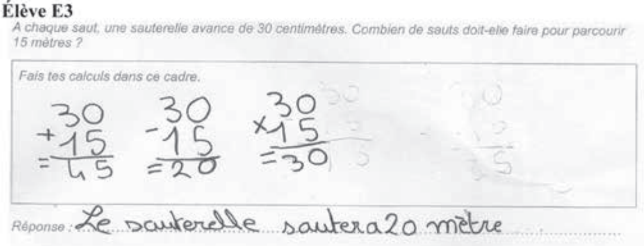

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

30
×50
00
+1500
1500

Réponse : Elle doit faire 50 sauts pour faire 15 mètres

Élève E3

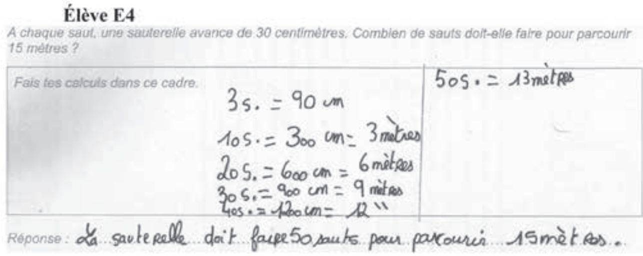

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

30 + 15 = 45
30 − 15 = 20
30 × 15 = 30

Réponse : Le sauterelle sautera 20 mètre

Élève E4


A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

3s. = 90 cm
10s. = 300 cm = 3 mètres
20s. = 600 cm = 6 mètres
30s. = 900 cm = 9 mètres
40s. = 1200 cm = 12 "
50s. = 15 mètres

Réponse : La sauterelle doit faire 50 sauts pour parcourir 15 mètres.

Corrigé

Travail préalable

1. S'approprier et analyser le sujet

Compte tenu du barème et du format des sujets (3 parties sensiblement de même « poids »), il conviendrait d'accorder au maximum 1 h 15 min à chaque partie pour assurer le maximum de points. 15 minutes seront consacrées à la relecture pour éviter de perdre les 5 points liés à la maîtrise du français. Lisez attentivement les énoncés : il est souvent précisé que des parties, des exercices et/ou des questions sont indépendants… De fait, si un point vous résiste vous pouvez poursuivre.

Ce sujet proposé par le Ministère balaie des notions variées et classiques au concours du professorat des écoles sans présenter de difficulté particulière.

Première partie

Elle consiste à résoudre un problème comportant 2 sous-parties. Le thème est annoncé (théorème de Pythagore) ainsi que l'objectif (sa démonstration puis son utilisation dans le cas concret de la « portée visuelle »).

© Éditions Foucher

Partie A – Les questions sont très guidées. Vous aurez à faire deux démonstrations : montrer que 3 points sont alignés et qu'un quadrilatère est un trapèze.
Partie B – Ici aussi, les questions sont très guidées et sollicitent une démonstration, un calcul et l'étude d'une fonction dont la représentation graphique est donnée.

Deuxième partie

Elle comporte quatre exercices indépendants : trois exercices courts de mathématiques et un exercice d'analyse de deux productions d'élèves. Les questions posées dans ce dernier exercice sont classiques : description de la procédure utilisée, repérage des erreurs commises et formulation d'hypothèses sur leur origine.

Troisième partie

Comme l'indique le sujet, l'objectif de cette partie vise l'analyse mathématique du concept de proportionnalité. Quatre problèmes en relevant sont soumis à votre étude. Ils balaient toute l'école primaire (la situation D concerne la maternelle et la situation B une évaluation à l'entrée en sixième – évaluation de la fin de l'élémentaire).
Dans la situation A : une analyse de quatre productions d'élèves vous est demandée (procédures utilisées, niveau de classe, erreurs). Le document concernant le programme de collège (page 6 du sujet) est pour vous une aide (les procédures de résolution attendues au cycle 3 y figurent).

2. Mobiliser ses connaissances

Première partie

Partie A – Vous devez montrer que 3 points sont alignés et qu'un quadrilatère est un trapèze. Pour ce faire, il vous faut connaître les équivalences correspondantes : les 3 points déterminent un angle plat et le quadrilatère a 2 côtés parallèles. Vous aurez besoin d'appliquer la formule de l'aire d'un trapèze et d'utiliser une identité remarquable.
Partie B – Elle met en œuvre les notions de droite tangente en un point à un cercle, d'arrondi à un rang donné, de fonction, de lecture graphique, de proportionnalité (implicitement). Il vous faut savoir effectuer des calculs assez longs (maîtriser l'usage de votre calculatrice) et des conversions de mesures de longueur (dans un même calcul, les unités doivent être les mêmes).

Deuxième partie

Le premier exercice porte sur un calcul de probabilité (voir *fiche 36*), le second sur le sens et le calcul d'une moyenne arithmétique (voir *fiche 11*), le troisième sur la notion de vitesse moyenne et les grandeurs qui lui sont attachées : temps et distance (voir *fiche 46*). L'exercice d'analyse de deux productions d'élèves porte sur un calcul de durée (voir *fiche 49*).

Troisième partie

Ce sujet vous amène d'une part à expliciter ce qui est attendu relativement à l'apprentissage de la notion de proportionnalité aux différents niveaux de classe (il vous faut connaître les progressions et l'importance

© Éditions Foucher

du choix des valeurs numériques sur les procédures) et d'autre part à faire état de vos propres connaissances mathématiques sur le sujet : (propriété de linéarité, verbalisation des raisonnements (« ...fois plus »...), représentation graphique, etc.). Référez-vous aux *fiches 31* et *34*.

Copie du candidat

Première partie
Problème

Partie A

1. Montrons que les points A, B et D sont alignés

Méthodo

Pour montrer que les points A, B et D sont alignés, on prouve que $\widehat{ABD}$ est un angle plat.

Les triangles ABC et BDE sont rectangles et les côtés de leur angle droit ont deux à deux la même longueur. Ces triangles sont donc isométriques (superposables) et leurs angles aigus ont la même mesure.
On a : $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EBD}$.
On sait que dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires (leur somme est égale à 90°).
On a donc : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$; il s'ensuit $\widehat{ABC} + \widehat{EBD} = 90°$.
Les angles : $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBE}$ et $\widehat{EBD}$ sont adjacents, d'où $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = 90° + 90° = 180°$.
Les points A, B et D sont donc alignés.

2. Montrons que le quadrilatère ADEC est un trapèze

Les triangles ABC et BDE sont rectangles respectivement en A et D par conséquent :
(AC) $\perp$ (AB) et (ED) $\perp$ (BD).
On a montré que les points A, B et D sont alignés donc :
(AB) = (BD) = (AD).
Les droites (AC) et (ED) sont donc perpendiculaires à la même droite (AD) ; par conséquent, elles sont parallèles entre elles et que le quadrilatère ADEC ayant 2 côtés parallèles est un trapèze.

3. Exprimons de deux manières différentes l'aire du trapèze ADEC en fonction de a, b et c

Procédure 1 : on applique la formule de l'aire d'un trapèze :

$$A_{(ADEC)} = \frac{(AC + ED) \times (AD)}{2} = \frac{(b+c)^2}{2} \text{ (égalité 1)}$$

Procédure 2 : on décompose le trapèze en 3 triangles rectangles :

$$A_{(ADEC)} = A_{(ABC)} + A_{(CBE)} + A_{(BDE)}$$

Les triangles ABC et BDE sont isométriques donc $A_{(ABC)} = A_{(BDE)}$ et

$$A_{(ADEC)} = 2A_{(ABC)} + A_{(CBE)} = bc + \frac{1}{2}a^2 = \frac{2bc + a^2}{2} \text{ (égalité 2)}$$

4. Déduisons l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$

En utilisant les égalités 1 et 2 de la question précédente, on obtient :

$$\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}, \text{ soit } (b+c)^2 = 2bc + a^2.$$

© Éditions Foucher

En développant puis en simplifiant, on obtient $b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$, soit $b^2 + c^2 = a^2$.

Partie B

1. **Démontrons l'exactitude de la formule donnée**

On sait que la droite (OV) est tangente en V au cercle (C) ; par conséquent, la droite (OV) est perpendiculaire à la droite (AV) et le triangle AOV est rectangle en V.

En lui appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :

$OA^2 = AV^2 + OV^2$ avec OA = OM + MA car les points O, M et A sont alignés dans cet ordre.

On a donc : $(OM + MA)^2 = AV^2 + OV^2$; d'où $OV^2 = (OM + MA)^2 - AV^2$.

Sachant que OV est une longueur c'est un nombre positif ; on en déduit que $OV = \sqrt{(OM + MA)^2 - AV^2}$. Or, MA = AV car [MA] et [AV] sont des rayons du même cercle (C). En développant, on obtient :

$OV = \sqrt{OM^2 + 2OM \times MA + MA^2 - MA^2} = \sqrt{MO^2 + 2OM \times MA}$

En remplaçant par les valeurs numériques données (en km), on a :

$OV = \sqrt{OM^2 + 2 \times 6\,370 \times OM} = \sqrt{OM^2 + 12\,740 \times OM}$.

2. **Portée visuelle théorique de l'observateur (arrondie au dixième de kilomètre)**

Méthodo

Il s'agit ici d'appliquer la formule donnée à un cas particulier. Attention, les distances sont à exprimer en km. 1 km = 1 000 m et 1 m = 0,001 km = 10^{-3} km (1 millième de kilomètre).

L'observateur étant placé au niveau de la mer, il est donc schématisé par le point M ; ses yeux sont situés à 1,70 m du sol, donc OM = 1,70 m = $1{,}7 \times 10^{-3}$ km = 0,0017 km.

$OV = \sqrt{(1{,}7 \times 10^{-3})^2 + 12\,740 \times 1{,}7 \times 10^{-3}} = \sqrt{(0{,}0017)^2 + 12\,740 \times 0{,}0017} \approx 4{,}7$ km

3. **Réponses à l'aide du graphique**

3.1 **Altitude permettant d'avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres**

Méthodo

Dans le sujet, les axes du graphique ne portent pas de légende mais on sait que la courbe représente la portée théorique en fonction de l'altitude d'un observateur. L'axe des abscisses représente donc OM et celui des ordonnées OV (longueurs sont exprimées en km). On rappelle que les lectures graphiques ne fournissent pas des valeurs exactes mais donnent des approximations.

On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 100) ; elle coupe la courbe en un point dont on lit l'abscisse (voir pointillés sur le graphique ci-après). On en conclut qu'il faut se placer à environ 0,8 km, soit 800 m d'altitude (une lecture plus précise donne 785 m).

Remarque

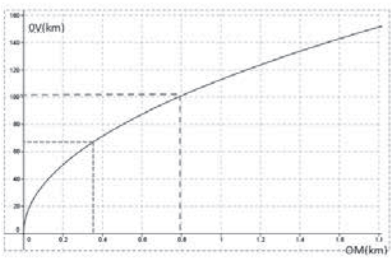
Pour connaître la valeur exacte, il faudrait résoudre l'équation $f(h) = 100$

© Éditions Foucher

3.2 **En haut de la Tour Eiffel dont l'altitude peut-on théoriquement voir la mer ? On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point (0,350 ; 0) ; elle coupe la courbe en un point dont on lit l'ordonnée (voir pointillés sur le même graphique). On lit « moins de 70 km » et on en conclut que l'observateur ne pourra pas voir la mer…**

Remarque

La réponse négative était évidente et on pouvait la justifier ainsi : d'après la question précédente, un observateur situé à environ 800 m d'altitude a une portée visuelle théorique de 100 km ; or, la fonction est croissante ; aussi, un observateur situé à une altitude inférieure (350 m) voit à moins de 100 km… Or, la mer est distante de plus de 100 km de la Tour Eiffel.



3.3 **L'affirmation est-elle vraie ?**

Méthodo

Il faut implicitement reconnaître un questionnement sur la représentation graphique d'une situation de proportionnalité (associée à une fonction linéaire).

Réponse 1 : L'affirmation « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » est fausse car la représentation graphique n'est pas une droite passant par l'origine qui caractérise les situations de proportionnalité. La fonction *f* n'est en effet pas une fonction linéaire.
Réponse 2 : On pouvait aussi répondre par un contre-exemple en s'appuyant sur les questions précédentes : en se plaçant à environ 800 m d'altitude on a une portée d'environ 100 km, or, le graphique montre qu'en se plaçant à 400 m on n'a pas une portée nettement supérieure à 50 km.

Deuxième partie
Exercices

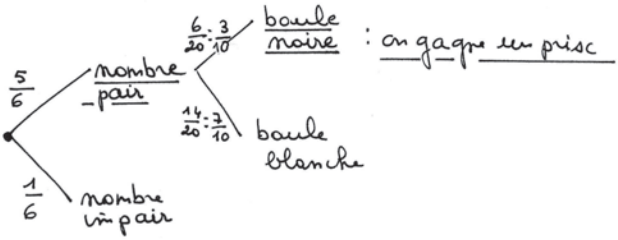
Exercice 1

Probabilité que Suzy gagne un prix

Pour cela, il faut que la roulette s'arrête sur un nombre pair et qu'une boule noire soit tirée.

© Éditions Foucher

Arbre des possibles représentant cette expérience :



La probabilité de gagner un prix est donc $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ (ou 25 %).

Exercice 2

Résultat pouvant être supprimé

Pour que la moyenne ne soit pas affectée, le résultat qui pourra être supprimé est celui qui lui est égal.

Moyenne des résultats :

$$\frac{268+220+167+211+266+152+270+279+192+191+164+229+223+222+246}{15} = 220$$

On peut donc supprimer le 2^{e} résultat.

Exercice 3

Méthodo

Il vous faut savoir convertir des durées exprimées dans le système sexagésimal (h, min et s) dans le système décimal et réciproquement. Certains « repères » sont pratiques à connaître : 15 min = 1/4 h = 0,25 h ; 30 min = 1/2 h = 0,5 h ; 45 min = 0,75 h ; 0,1 h = 1/10 h = 6 min.

La formule de la vitesse moyenne (v) en fonction de la distance parcourue (d) et du temps mis pour la parcourir (t) : $v = \frac{d}{t}$ permet d'exprimer d en fonction de v et t ($d = vt$) et t en fonction de v et d ($t = \frac{d}{v}$). Attention aux unités : elles doivent être compatibles.

1. Le coureur a-t-il raison ?

17 min 30 s = 17,5 min et 2 h 30 min = 2,5 h

Vitesse moyenne sur les 5 km de course : $\frac{5}{17{,}5} \times 60 = \frac{120}{7}$ km/h (NB : nombre non décimal)

Distance que le coureur parcourrait à cette allure en 2,5 h : $\frac{120}{7} \times 2{,}5 \approx 42{,}85$ km

42,195 < 42,85 ; le coureur a raison : à cette allure, il mettrait moins de 2 h 30 pour courir le marathon.

Autre procédure :

Temps à cette allure pour parcourir 42,195 km : $\dfrac{42{,}195}{\dfrac{120}{7}} = \dfrac{42{,}195 \times 7}{120} \approx 2{,}46$h.

2,46 h < 2,5 h, donc le coureur a raison.

2. Durée de la course

Vitesse après les vingt premiers kilomètres : 16 km/h × 0,9 = 14,4 km/h.

Le coureur a donc couru 20 km à la vitesse de 16 km/h et 22,195 km à 14,4 km/h.

© Éditions Foucher

Son temps pour ce marathon est donc : $\frac{20}{16}\text{h} + \frac{22{,}195}{14{,}4}\text{ h} = 2{,}791319\overline{4}$ h (le 4 se répète à l'infini)
$2{,}791319\overline{4}$ h = 2 h + $0{,}791319\overline{4}$ h = 2 h + $0{,}791319\overline{4} \times 60$ min = 2 h $47{,}479\overline{16}$ min = 2 h 47 min + $0{,}479\overline{16} \times 60$ s = 2 h 47 min $28{,}74\overline{9}$ s = 2 h 47 min 28 s 75 cs.

Exercice 4

1. Cycle et niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé

Le problème s'inscrit dans le domaine des « grandeurs et mesures » des programmes de 2008 ; il consiste à calculer une durée. L'apprentissage des unités de temps (heure, minute, seconde, mois et année) de leurs relations relève des deux premières années du cycle 3. Les textes indiquent que ces connaissances devront être utilisées dans le cadre de la résolution de problèmes. Néanmoins, il est spécifié que le calcul d'une durée à partir d'un instant initial et d'un instant final n'est réellement construit qu'en dernière année de ce cycle (cf. les progressions du B.O. page 39). La donnée 10 h 40 rend difficile un calcul formel de durée par soustraction de l'instant initial à l'instant final (le calcul 10 h 40 – 8 h 50 devant être transformé en 9 h 100 min – 8 h 50 min). Le problème posé ici peut être résolu plus facilement par un calcul réfléchi de sommes de durées (il y a 10 min de neuf heures moins dix à neuf heures, puis 1 h de neuf heures à dix heures et enfin 40 min de 10 h à 10 h 40, etc.), il peut être envisagé en CM1.

2. Analyse des productions des 2 élèves

	Procédure	Erreur(s)	Hypothèse
Thomas	Il choisit l'opération adaptée pour le calcul d'une durée : il soustrait l'heure de départ de l'heure d'arrivée. Il traite le calcul en ligne (peut-être l'a-t-il effectué mentalement).	Il traduit « neuf heures moins dix » par 9 h 50 (au lieu de 8 h 50). La soustraction n'est pas effectuée dans le système sexagésimal mais dans le système décimal (10,40 – 9,50 = 0,90). Sa réponse est fausse.	Il s'appuie sur « l'heure entendue » (« 9 h »). Le « 50 » montre qu'il connaît la relation « heure-minute » : il a bien enlevé 10 min à 60 min (base soixante). Il ne sait pas traiter l'opération dans cette base, il traite la soustraction dans le système qu'il connaît.
Kévin	Il additionne en colonne tous les nombres de l'énoncé, qu'ils soient écrits en chiffres ou en lettres et ce dans l'ordre où ils se présentent (signe + absent). Il répond en ajoutant la somme trouvée à 9 h (rép. 9 h 69).	Il ne tient pas compte de la situation décrite mais seulement des nombres entiers « dits » ou écrits.	Il se peut que, pour lui, un problème se résout en additionnant tous les nombres donnés par l'énoncé (représentation erronée de la solution d'un problème).

© Éditions Foucher

TROISIÈME PARTIE
ANALYSE D'EXERCICES PROPOSÉS À DES ÉLÈVES ET DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES RELEVANT DE LA PROPORTIONNALITÉ

Situation A

Remarque

Il n'est pas précisé si l'évaluation concerne une évaluation de début ou de fin de cycle 3.

1. En quoi cet énoncé relate une situation de proportionnalité ?

Une situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire ($f(x) = ax$ où a est un nombre, c'est le coefficient de proportionnalité). Ici, la longueur d'un saut est une constante (« *À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm* ») ; dès lors, la longueur du déplacement de la sauterelle est fonction linéaire du nombre $\times$ de sauts et peut s'exprimer sous la forme : $f(x) = 30x$ (longueur en cm).

2. Analyse des 4 productions

Méthodo

Résolvez le problème : 15 m = 1 500 cm ; 1 500 cm = 50 × 30 cm. La sauterelle doit faire 50 sauts.

	a. Procédure	**b. Hypothèse sur l'origine des erreurs**
E1	L'élève représente le parcours : un segment partagé en 15 intervalles de 1 m (les bornes sont numérotées 0, 1, 2, ...15). En dessous, il dessine de façon régulière les bonds de 30 cm. Dans un intervalle de 1 m, il y a (bien) plus de 3 sauts mais moins de 4. Sa réponse correspond au nombre de bonds dessinés. La proportionnalité est prise en compte implicitement : chaque saut mesure 30 cm.	La réponse donnée est erronée (52) mais proche de la réponse exacte (50). La procédure est expérimentale (et non calculatoire), elle est « lourde » et délicate ; il est remarquable qu'elle ait été menée à son terme (petite erreur dans le dénombrement des bonds : 51 dessinés).
E2	Cet élève semble avoir une connaissance intuitive des nombres. Après avoir converti mentalement 15 m en 1 500 cm, il conjecture « spontanément » les 50 sauts et vérifie, en posant la multiplication, la relation 30 × 50 = 1 500. On peut considérer qu'il utilise le coefficient de proportionnalité (longueur d'1 bond 30 cm) : 50 bonds correspondent à 50 fois plus qu'un bond.	

© Éditions Foucher

	a. Procédure	b. Hypothèse sur l'origine des erreurs
E3	Cet élève pose 3 calculs différents (addition, soustraction et multiplication) en utilisant les 2 données numériques de l'énoncé. Il ne semble pas qu'il ait compris la situation… Aucune référence à la notion de proportionnalité.	L'élève semble en grande difficulté. La formulation de la réponse est erronée : on demande un nombre de bonds, l'élève répond par une longueur (20 m). Cette réponse semble donnée au hasard (20 est le résultat le plus proche de 15 ?). Seule l'addition a été posée correctement.
E4	Cet élève procède par essais successifs en calculant mentalement la distance parcourue en 3 sauts, 10 sauts, 20 sauts… jusqu'à parvenir à la réponse exacte de 50 sauts. Il maîtrise la table de 3, les produits par 10 et les conversions de « cm en m ». Mise en œuvre implicite du coefficient de proportionnalité.	

3. Modélisation de la situation de proportionnalité

c. Si x désigne le nombre de sauts de la sauterelle, la distance y (en cm) qu'elle parcourt est donnée par la fonction f définie par $y = f(x) = 30x$.

d. Réponse fournie en utilisant cette fonction : $y = 1\,500$, d'où $1\,500 = 30x$; on résout cette équation :
$x = 1\,500 \times 30 = 50$. La sauterelle parcourt 1 500 cm = 15 m en 50 sauts.

Situation B

1. Indication de la notion de proportionnalité dans la situation

Cet énoncé correspond aux situations marchandes classiques : hors promotion, le prix payé est proportionnel au nombre d'articles achetés (de même prix chacun). C'est l'adjectif « identiques » qui, ici, indique qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.

2. Différence avec l'énoncé précédent

Contrairement à l'exercice précédent, l'énoncé ici n'indique pas le coefficient de proportionnalité (il correspond au prix d'un objet).

3. Trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3

• Passage par l'unité (ou règle de trois)
6 objets identiques coûtent 150 € ;
1 objet coûte 150 ÷ 6 = 25 € ;
9 objets coûtent 25 ÷ 9 = 225 €.

• Mise en œuvre des 2 propriétés de linéarité : additive et multiplicative (homogénéité)
On utilise la relation arithmétique : 9 = 6 + 3 ; c'est « 6 plus la moitié de 6 ».
Le prix de 3 objets est la moitié du prix de 6 objets donc : 150 ÷ 2 = 75 €.
Prix de 9 objets : 150 + 75 = 225 €.

© Éditions Foucher

Dans le langage des fonctions, on peut écrire : $f(9) = f(6 + 3) = f(6) + f(\frac{1}{2} \times 6) = f(6) + \frac{1}{2} \times f(6)$.

• Utilisation d'un coefficient multiplicatif (propriété d'homogénéité)
On utilise la relation arithmétique : $9 = 6 \times 1{,}5$.
Il s'ensuit : $f(9) = f(6 \times 1{,}5) = 1{,}5 \times (6) = 1{,}5 \times 150 = 225$ (€)

Situation C

1. Nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence
Les élèves placeront dans le repère cartésien les points (2 ; 8), (3 ; 12), (4 ; 16), (5 ; 20), (6 ; 24) et (10 ; 40) ; ils constateront que ces points sont alignés avec le point O. En effet, la base du pavé droit étant constante (4 cm^2), son volume V est proportionnel à sa hauteur h (V(h) = 4 h) et la représentation graphique, caractéristique d'une situation de proportionnalité, est une droite passant par l'origine du repère.

2. Cas où la longueur du côté du carré de la base varie
Dans ce cas le volume V est fonction du côté du carré ; on aurait $V(c) = h \times c^2$ avec h constante.
La fonction n'est plus linéaire, c'est une fonction carré et sa représentation graphique n'est pas une droite mais une parabole. Il ne s'agit plus d'une situation de proportionnalité.

Situation D

1. Cas du problème d'échange en maternelle
Il s'agit bien d'une situation de proportionnalité : chaque échange se réalise selon une même valeur (fixée ici dans un rapport de double/moitié). 1 bille bleue (B) vaut le double (« deux fois plus ») d'une rouge (R) : 1B = 2R ; donc 3B = 6R. Ces problèmes amènent les enfants à se détacher des objets physiques pour s'intéresser à leur valeur (développement des capacités d'abstraction).

2. Explicitons une procédure de résolution envisageable en grande section de maternelle
On peut soumettre aux enfants ce problème en laissant à disposition du matériel : des jetons bleus et des jetons rouges (qui ont l'avantage de ne pas rouler). Le problème sera alors résolu par manipulation : les échanges seront effectifs : les enfants poseront 3 jetons bleus sur la table puis, chaque jeton bleu sera remplacé par 2 rouges ; on comptera au final les jetons rouges obtenus. On reprendra plusieurs fois des problèmes analogues : on fera varier le nombre de jetons bleus.
Quand ces activités seront bien maîtrisées, on pourra proposer des échanges fictifs ; la procédure sera alors figurative : les échanges se feront à travers des dessins ; après avoir dessiné au feutre bleu 3 billes bleues (3 ronds bleus), chacune d'elle sera barrée et remplacée par 2 billes rouges. La solution sera obtenue par comptage des ronds rouges.

© Éditions Foucher