

Écoles de commerce & de management

RÉUSSIR LES CONCOURS

Tremplin Passerelle

1&2

Tout-en-Un

HEC-ESCP/EDHEC

Stéphane Balland

Agrégé d'économie-gestion
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée Henri Moissan, Meaux)

Jean-Luc Koehl

Agrégé d'économie-gestion
Professeur de chaire supérieure
en classes préparatoires aux grandes écoles
(Lycée René Cassin, Strasbourg)

Emmanuelle Muller

Agrégée d'anglais
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée René Cassin, Strasbourg)

Miguel Romero

Agrégé de mathématiques
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée Marie Curie, Sceaux)

Dominique Bourgeois

Agrégé d'économie-gestion
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée Henri Moissan, Meaux)

Rémi Leurion

Agrégé d'économie-gestion
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée Marie Curie, Sceaux)

Cécile Penot

Agrégée d'anglais
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée René Cassin, Strasbourg)

Pascal Simon-Doutreluingne

Agrégé d'économie-gestion
Professeur en classes préparatoires
aux grandes écoles
(Lycée René Cassin, Strasbourg)



« Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs.

Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. »

ISBN 978-2-216-11858-8

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français du Droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et, d'autre part, les analyses et courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (loi du 1^{er} juillet 1992 - art. 40 et 41 et Code pénal - art. 425).

Sommaire

Chapitre 1 • Présentation des concours d'écoles	7
Chapitre 2 • Note de synthèse	17
Chapitre 3 • Tests	73
Chapitre 4 • Anglais (épreuves écrites et orales)	143
Chapitre 5 • Mathématiques	233
Chapitre 6 • Économie	273
Chapitre 7 • Droit	309
Chapitre 8 • Marketing	325
Chapitre 9 • Gestion	345
Chapitre 10 • Culture générale, Sciences économiques et Analyse de situation	371
Chapitre 11 • Entretien (épreuve orale)	393

Mathématiques

1 Méthodologie

2 Sujets pour le concours d'entrée à l'EDHEC

Sujet 1 - Matrices et applications linéaires

Sujet 2 - Probabilités discrètes, matrices

Sujet 3 - Variable aléatoire à densité

Sujet 4 - Intégrales, variables aléatoires continues

Sujet 5 - Suite numérique, récurrence

3 Sujets pour l'option mathématique à Passerelle 2

Sujet 1 - Variable aléatoire discrète

Sujet 2 - Probabilité continue

Sujet 3 - Étude de fonction, suite

Sujet 4 - Séries, intégrales

Sujet 5 - Algèbre bilinéaire

1 ► Méthodologie

L'**épreuve de mathématiques du concours EDHEC ASTI** (admission sur titre en première année) dure deux heures et est dotée du coefficient 4, soit le même que la langue vivante I (deux heures aussi) et la synthèse (quatre heures). Impossible donc de rater l'une des épreuves si l'on ambitionne d'être admissible ! Cela dissuade bien des candidats qui ne sont pas d'un niveau suffisant en mathématiques, et cela laisse autant de place aux candidats bien préparés dans cette matière.

Le programme du concours est ambitieux sur le chapitre des probabilités, mais moins dans les autres domaines (analyse, algèbre générale et algèbre linéaire). Néanmoins, en le comparant aux sujets des épreuves des dix dernières années, force est de constater que ceux-ci n'épuisent pas toutes ses possibilités ; en d'autres termes, on peut s'en sortir très bien à l'épreuve sans dominer plusieurs subtilités du programme.

La calculatrice est interdite, ce qui devient la norme à ce niveau d'exigence. L'épreuve est composée de trois exercices (une seule exception depuis dix ans), dont l'un, presque toujours le dernier, est substantiellement plus long que les deux autres, et permet de connecter deux domaines du programme (par exemple probabilités discrètes et matrices, ou variables aléatoires continues et intégrales, ou fonctions et suites numériques...)

Le but affiché de l'épreuve est de tester les candidats sur tout le programme. Cela signifie concrètement qu'on y trouvera à coup (presque) sûr un exercice sur une fonction, un autre sur les matrices et un troisième sur les probabilités, discrètes ou continues. Les suites et les séries peuvent venir renforcer les probabilités discrètes, les intégrales peuvent venir renforcer les probabilités continues ou les fonctions réelles, ces dernières peuvent parfois être remplacées par une étude de fonctions de plusieurs variables. C'est donc une épreuve prévisible dans les grandes lignes.

Son autre caractéristique notable est qu'elle est longue ; en fait presque impossible à terminer dans le temps imparti. Cela se justifie pleinement du point de vue du correcteur : si deux excellents candidats terminaient l'épreuve, l'un une demi-heure avant l'autre, il n'y aurait pas moyen de les différencier, et la personne la plus rapide ne serait pas évaluée à sa juste valeur.

Du point de vue du candidat, cela signifie que la gestion du temps est importante. Il est recommandé de commencer par l'exercice qui traite le sujet que l'on domine le mieux ; de ne pas s'obstiner sur une question où l'on ne voit pas comment s'en sortir (ne perdez pas plus de dix minutes sans écrire). Il ne faut pas se fixer comme objectif de tout faire, mais il est souhaitable de toucher aux trois exercices. Ne pas aborder le grand exercice risque d'être mal vu et peu rentable.

Le programme, les annales corrigées et les rapports des examinateurs sont disponibles sur le site internet de l'EDHEC (tapez programme ASTI et annales ASTI + l'année).

Suivent cinq sujets originaux pour vous préparer à ce concours. Ils couvrent une bonne partie du programme, et les corrections sont détaillées.

L'**option mathématique du concours Passerelle 2** est plus facile. L'écart entre les épreuves des dix dernières années et le programme officiel est très important, bien plus que pour l'EDHEC.

Suivent cinq autres sujets originaux pour vous y préparer. Mis à part le dernier, ils pourront vous servir aussi pour l'EDHEC.

2 ► Sujets pour le concours d'entrée à l'EDHEC

Sujet 1 - Matrices et applications linéaires

► Énoncé

Notations, rappels et propriétés admises :

On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et l'on sait que $\mathbf{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathbf{E} = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. On note respectivement I_2 et O_2 la matrice identité et la matrice nulle d'ordre 2.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de \mathbf{E} , on note ${}^t M$ sa transposée et $\text{tr}(M)$ sa trace.

On admet les propriétés suivantes :

Toute matrice carrée d'ordre 4 de la forme $A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O_2 \\ O_2 & C \end{pmatrix}$

où $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ (A est dite « diagonale par bloc ») vérifie :

Propriété P_1 : $\det A = \det B \cdot \det C$: le déterminant de A est donc le produit des déterminants de ses « blocs » diagonaux B et C et :

Propriété P_2 : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} B^n & O_2 \\ O_2 & C^n \end{pmatrix}$, propriété qui se généralise à tout entier relatif n à la seule condition que B et C soient inversibles.

Soit f l'application qui à une matrice M de \mathbf{E} associe la matrice $f(M) = M + {}^t M + \text{tr}(M)I_2$.

1) Montrez que f est un endomorphisme de \mathbf{E} .

2) Exprimez $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ en fonction de E_1 , E_2 , E_3 et E_4 puis

montrez que la matrice A de f dans la base \mathbf{B} est $A = \text{mat}_{\mathbf{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Montrez sans calcul que A n'est pas inversible, puis, toujours sans calcul, déterminez le rang de f .

4) En considérant ${}^t f(M)$, montrez que l'image de f est l'ensemble des matrices symétriques de \mathbf{E} . Caractérisez de même le noyau de f .

5) Calculez les valeurs propres de f , puis déterminez quatre vecteurs propres indépendants entre eux tels que la première coordonnée non nulle de chaque vecteur soit égale à 1.

6) Montrez que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et P une matrice inversible

diagonale par bloc que vous donnerez, ainsi que la base \mathbf{B}'' constituée de vecteurs propres telle que P soit la matrice de passage de \mathbf{B} à \mathbf{B}'' . Quel lien y a-t-il entre D et f ?

7) Calculez le plus simplement possible la matrice P^{-1} .

8) Justifiez que pour tout n de \mathbb{N} , $A^n = PD^nP^{-1}$ et déduisez-en l'expression explicite de A^n en fonction de n lorsque $n > 0$.

9) Déterminez les matrices M telle que $f \circ f \circ f(M) = I_2$.

► Commentaire

C'est un exercice sur les applications linéaires et les matrices. Il met en jeu de manière presque exhaustive les principales techniques du calcul matriciel, dont le calcul des valeurs et des vecteurs propres, le changement de bases, l'élevation d'une matrice à une puissance : rien qui ne surprendra un candidat raisonnablement préparé. Une première (petite) difficulté est d'accepter qu'un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ correspond à une matrice carrée d'ordre 4; l'énoncé donne cette matrice afin qu'aucun candidat ne reste bloqué. L'autre difficulté est d'utiliser les deux propriétés données en début d'énoncé et que la plupart des candidats ne connaissent sans doute pas. Ces propriétés permettent d'accélérer les calculs et sont simples d'usage, mais le candidat pourrait ne pas l'utiliser par simple inertie, ce qui lui ferait perdre du temps : c'est pour cela que l'énoncé suggère de manière quasi subliminale (en question 5) de l'utiliser.

CORRIGÉ

1) L'application f va bien de \mathbf{E} vers lui-même ; elle est linéaire car la transposition (c'est-à-dire l'application $M \rightarrow {}^t M$) l'est, ainsi que la trace, propriété conservée par la multiplication par une constante (ici I_2) et par la somme.

Le mieux est de rédiger ainsi : Pour des matrices M et M' dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et un réel λ :

$$f(\lambda M + M') = \lambda M + M' + {}^t(\lambda M + M') + \text{tr}(\lambda M + M') I_2$$

par linéarité de la transposition et de la trace :

$= \lambda M + M' + \lambda {}^t M + {}^t M' + \lambda \operatorname{tr}(M) I_2 + \operatorname{tr}(M') I_2$
 on regroupe les M d'un côté et les M' de l'autre, on factorise λ
 $= \lambda (M + {}^t M' + \operatorname{tr}(M) I_2) + (M' + {}^t M' + \operatorname{tr}(M') I_2) = \lambda f(M) + f(M')$,
 d'où la linéarité.

$$\begin{aligned}
 2) f(E_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) I_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 3E_1 + E_2 \text{ puis } f(E_2) &= E_1 + 3E_2, f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 E_3 + E_4
 \end{aligned}$$

De même $f(E_4) = E_3 + E_4$. Les colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de la matrice A sont dans l'ordre $f(E_1), f(E_2), f(E_3)$ et $f(E_4)$ exprimés dans la base \mathbf{B} donc

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ce qui donne la matrice de l'énoncé.}$$

3) Les deux dernières colonnes de A sont égales, donc A et f ne sont pas inversibles. En effet $f(E_3) = f(E_4)$ donc $f(E_3) - f(E_4) = O_2$ d'où $f(E_3 - E_4) = O_2$ donc $E_3 - E_4 \in \operatorname{Ker} f$: le noyau de f n'étant pas réduit à la matrice nulle, f n'est pas injective donc pas bijective (ce sont des propriétés équivalentes en dimension finie).

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \operatorname{vect}(C_1, C_2, C_3)$ (car $C_4 = C_3$) est de dimension 3 car C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles (ou colinéaires) donc indépendantes et C_3 n'est pas dans le plan engendré par C_1 et C_2 (il suffit de considérer l'emplacement des zéros), d'où $\operatorname{rg} f = 3$.

$$\begin{aligned}
 4) {}^t(f(M)) &= {}^t(M + {}^t M + \operatorname{tr}(M) I_2) = {}^t M + {}^t({}^t M) + \operatorname{tr}(M) {}^t I_2 = \\
 &= {}^t M + M + \operatorname{tr}(M) I_2 = f(M).
 \end{aligned}$$

Cela signifie que la matrice $f(M)$ est symétrique. L'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$, de dimension 3, est donc inclus dans l'espace vectoriel des matrices symétrique $S = \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$, qui n'est pas tout E (car il existe des matrices non symétriques) donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3 \leq \dim S < 4$.

Cela entraîne que $\dim \operatorname{Im} f = \dim S$, et comme $\operatorname{Im} f \subset S$ on a $\operatorname{Im} f = S$ (si un espace vectoriel est inclus dans un autre qui a la même dimension finie, alors ils sont égaux).

Par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E - \operatorname{rg} f = 4 - 3 = 1$, donc le noyau de f est engendré par un de ses vecteurs non nuls, par exemple par $E_3 - E_4$ qui est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, or cette matrice engendre toutes les matrices antisymétriques, qui sont toutes de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ avec b réel. Finalement $\operatorname{Ker} f$ est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques, noté $\mathbf{A}_2(\mathbb{R})$.

5) Déterminons le polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

(car on reconnaît une matrice diagonale par blocs, on applique la propriété P_I)

$$= (3 - \lambda)^2 - 1 \cdot (1 - \lambda)^2 - 1 = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(2 - \lambda)(-\lambda) = (\lambda - 4)(2 - \lambda)^2 \lambda.$$

Les valeurs propres sont donc 4; 2, valeur propre double, et 0. On retrouve ainsi le rang de f . Cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre 4 :

$$(A - 4I_2)X = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ -3c + d = 0 \\ c - 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Un vecteur possible est donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (sa première coordonnée non nulle est

bien 1). On procède de même pour la valeur propre 2 et on obtient :

$$(A - 2I_2)X = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ d = c \end{cases} \text{ alors}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On voit deux vecteurs qui engendrent l'espace}$$

propre associé à 2 :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ces deux vecteurs sont indépendants car non}$$

colinéaires. Pour la valeur propre 0, on obtient $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (déjà vu à la

question 3). Les vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes sont forcément indépendants, et comme u_2 et u_3 le sont aussi entre eux, les quatre vecteurs constituent donc une famille libre de taille $4 = \dim(\mathbf{M}_2(\mathbb{R}))$, donc c'est une base.

6) Notons $B' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$; c'est une base propre de f . Notons respectivement

$$P = P_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{mat}_{B'} f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matrice de}$$

passage de B à B' et la matrice diagonale représentant f dans la base propre B' , alors par la formule de changement de bases, on a $A = PDP^{-1}$.

7) P est une matrice diagonale par blocs, et les deux blocs sont inversibles et en plus identiques : $P = \begin{pmatrix} Q & O_2 \\ O_2 & Q \end{pmatrix}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}Q$, alors d'après la propriété P_2 : $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & O_2 \\ O_2 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q & O_2 \\ O_2 & Q \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$.

8) C'est une démonstration classique, à bien connaître.

Soit Q_n la proposition « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Comme $PD^0P^{-1} = P I_4 P^{-1} = P P^{-1} = I_4 = A^0$, Q_0 est vraie, ce qui initie ou « amorce » la récurrence.

Supposons Q_n vraie pour un n fixé dans \mathbb{N} .

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_4DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui est exactement Q_{n+1} (on a utilisé Q_n et Q_1 vraie d'après la question précédente). La propriété est donc héréditaire, et par conséquent vraie sur tout \mathbb{N} .

Si $n > 0$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (comme $n \neq 0$ on évite le problème 0^0 dans D^0).

$$\begin{aligned} PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 2^n & 0 & 0 \\ 4^n & -2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n & 0 & 0 \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 2^n \\ 0 & 0 & 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9) En prenant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation $f \circ f \circ f(M) = I_2$ s'écrit

$$A^3 \begin{pmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(attention à l'ordre des coordonnées) car A^3 est la matrice de $f \circ f \circ f$ dans la base B .

$$\begin{pmatrix} 36 & 28 & 0 & 0 \\ 28 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 36a + 28d = 1 & (1) \\ 28a + 36d = 1 & (2) \\ 4b + 4c = 0 \\ 4b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

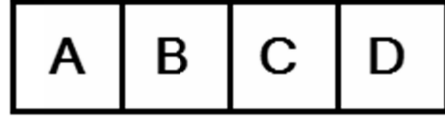
$$\begin{cases} 64a + 64d = 2 & (1) + (2) \\ 8a - 8d = 0 & (1) - (2) \\ c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = \frac{1}{32} \\ d = a \\ c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a = \frac{1}{64} \\ c = -b \end{cases}.$$

Les solutions sont les $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & b \\ -b & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$, avec $b \in \mathbb{R}$.

► Énoncé

Partie 1

On considère un jeu qui consiste à déplacer un pion sur un « damier » de quatre cases, notées A , B , C et D . Les règles sont les suivantes : Si le pion est en B , il ne peut se déplacer qu'en A et en C , de manière équiprobable. De même, s'il est en C , il ne peut se déplacer qu'en B et en D , de manière équiprobable. S'il atteint les cases A ou D , il y reste. Le but de cette partie est de calculer la probabilité que le pion reste bloqué en A à partir d'un certain moment.



On note A_n l'événement : « le pion est en A au bout du $n^{\text{ième}}$ mouvement » (respectivement pour B_n , C_n et D_n). On note enfin $a_n = P(A_n)$ (respectivement pour b_n , c_n et d_n).

Initialement le pion est en B .

On note A_n l'événement : « le pion est en A au bout du $n^{\text{ième}}$ mouvement » (respectivement pour B_n , C_n et D_n). On note enfin $a_n = P(A_n)$ (respectivement pour b_n , c_n et d_n).

Initialement le pion est en B .

1) Établissez rigoureusement les relations suivantes :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2}; b_{n+1} = \frac{c_n}{2}; c_{n+1} = \frac{b_n}{2} \text{ et } d_{n+1} = \frac{c_n}{2} + d_n;$$

2) Déterminez les valeurs de a_n , b_n , c_n et d_n pour $0 \leq n \leq 2$.

3) Prouvez par récurrence que $c_n = 0$ lorsque n est pair, et $b_n = 0$ lorsque n est impair.

4) On définit la suite u par $u_n = b_{2n}$. Démontrez que u est une suite géométrique, puis exprimez u_n en fonction de n . Déduisez-en l'expression de b_n et de c_n .

5) Démontrez que la suite (a_n) est convergente, puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et calculez cette limite, ainsi que les limites de b_n , c_n et d_n (justifiez sans calcul).

Partie 2

On modifie la règle du mouvement : Le pion en A peut soit y rester, soit aller en B , et ce de manière équiprobable. De même le pion en D peut y rester ou aller

en \mathbb{C} , avec équiprobabilité de ces deux événements. Ce sont les seules modifications.

On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ le vecteur « état probabiliste » au bout du $n^{\text{ième}}$ mouvement.

1) Montrez que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = M X_n$, où

$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la « matrice de transition ». Donnez X_0 .

2) Démontrez que le polynôme caractéristique de M est

$P(\lambda) = \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)(2\lambda^2 - 1)$ puis donnez les valeurs propres de M .

3) Justifiez qu'il existe une matrice inversible d'ordre 4 P et une matrice diagonale D dont les valeurs sur la diagonale sont rangées dans l'ordre croissant telle que $M = P D P^{-1}$; donnez la matrice D mais ne cherchez pas à calculer pas la matrice P .

4) Montrez que pour tout entier naturel n , $X_n = M^n X_0$ et $M^n = P D^n P^{-1}$.

5) Montrez que D^n admet une limite lorsque n tend vers l'infini, et déduisez-en que les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) convergent. On note a , b , c et d leurs limites

respectives, et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ le vecteur « état probabiliste limite ».

6) Montrez que $M X = X$ puis déterminez X .

► Commentaire

Il s'agit d'un sujet de type « marche aléatoire » c'est-à-dire déplacement conditionné par le hasard. C'est un domaine d'étude vaste et fécond, qui permet de modéliser des systèmes (par exemple économiques) qui changent d'état de manière imprévisible ou indéterministe, voire chaotique (la position d'un pion peut modéliser l'état d'un système, un déplacement étant un changement d'état). C'est assez « à la mode », et risque de le rester ; ce n'est pas pour rien que la notion sous-jacente, le graphe probabiliste, a été introduit en spécialité de terminale ES depuis quelques années déjà.

Pour l'instant, les notions de graphe probabiliste, vecteur d'état probabiliste et matrice de transition ne sont pas au programme de ces concours, mais il est

avisé d'être familiarisé avec ce thème.

La partie 1 aborde un exemple suffisamment simple pour ne pas requérir l'outil matriciel. Elle permet de revoir les probabilités conditionnelles, la récurrence, les suites et séries géométriques. La partie 2 utilise les matrices pour démontrer la convergence de suites de probabilités.

CORRIGÉ

Partie 1

Par simplicité typographique, on note la probabilité conditionnelle de A sachant B , $P(A/B)$ plutôt que $P_B(A)$, le candidat étant évidemment libre de choisir la notation qu'il préfère.

1) $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ est une partition de l'univers (ou un système complet d'événements) on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) P(A_{n+1}/A_n) + P(B_n) P(A_{n+1}/B_n) + P(C_n) P(A_{n+1}/C_n) + P(D_n) P(A_{n+1}/D_n) = a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 0 + d_n \times 0 = a_n + \frac{b_n}{2} : \text{en effet}$$

$P(A_{n+1}/C_n) = P(A_{n+1}/D_n) = 0$ car si le pion est en C ou en D à l'instant n (c'est-à-dire après le $n^{\text{ième}}$ mouvement) il ne peut être en A à l'instant suivant ;

d'autre part $P(A_{n+1}/A_n) = 1$ car si le pion est en A à l'instant n il le sera aussi à l'instant suivant, enfin $P(A_{n+1}/B_n) = \frac{1}{2}$ car, d'après l'équiprobabilité, si le pion est en B à un instant donné, il a une chance sur 2 de se déplacer en A , et donc d'être en A à l'instant suivant, et autant de se déplacer en C . On procède de même pour obtenir les autres relations :

Les probabilités conditionnelles non nulles sont :

$$P(B_{n+1}/C_n) = \frac{1}{2}; P(C_{n+1}/B_n) = \frac{1}{2}, P(D_{n+1}/C_n) = \frac{1}{2} \text{ et } P(D_{n+1}/D_n) = 1 ; \text{ ainsi}$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) P(B_{n+1}/A_n) + P(B_n) P(B_{n+1}/B_n) + P(C_n) P(B_{n+1}/C_n) + P(D_n) P(B_{n+1}/D_n) = \frac{1}{2} \times c_n \text{ et de même pour } P(C_{n+1}) \text{ et pour } P(D_{n+1}).$$

2) B est initialement (c'est-à-dire avant le premier mouvement) en B , donc $b_0 = 1$, et $a_0 = c_0 = d_0 = 0$. Ensuite, on applique les relations de la question précédente (même si on ne les a pas prouvées)

$$a_1 = a_0 + \frac{b_0}{2} = \frac{1}{2}; b_1 = \frac{c_0}{2} = 0; c_1 = \frac{b_0}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } d_1 = \frac{c_0}{2} + d_0 = 0.$$

$$\text{Par un calcul semblable, } a_2 = \frac{1}{2}; b_2 = \frac{1}{4}; c_2 = 0; d_2 = \frac{1}{4}.$$

3) Soit P_n la proposition « $c_{2n} = 0$ ». Comme $c_0 = 0$, P_0 est vraie, ce qui amorce (ou « initie ») la récurrence. Supposons P_n vraie pour un entier naturel n donné.

Alors $c_{2(n+1)} = c_{2n+2} = c_{(2n+1)+1} = \frac{1}{2}b_{2n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}c_{2n} = 0$ d'après P_n ; cela prouve l'hérédité de la proposition. Par conséquent elle est vraie pour tous les naturels. D'autre part $b_{2n+1} = \frac{1}{2}c_{2n} = 0$ donc les termes de rang impair de la suite (b_n) sont tous nuls.

4) $u_{n+1} = b_{2(n+1)} = b_{(2n+1)+1} = \frac{1}{2}c_{2n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}b_{2n} = \frac{1}{4}u_n$. La suite u est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = b_0 = 1$.

Ainsi $u_n = u_0 q^n = \frac{1}{4^n}$.

Donc pour tout naturel pair $n = 2k$, $b_n = b_{2k} = u_k = \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^n}} = \frac{1}{2^n}$.

Pour n impair, $c_n = \frac{1}{2}b_{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$.

5) Comme a_n et b_n sont des probabilités, ce sont des nombres positifs et majorés par 1. Il s'ensuit que, puisque $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n}{2} \geq 0$, donc la suite (a_n) est croissante et majorée, donc convergente (théorème de la convergence monotone).

La première relation de l'énoncé donne, en remplaçant n par $n - 1$:

$a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{2}$; par sommation (on écrit cette relation pour $n = 0$; $n = 1 \dots$ jusqu'à n) ou par récurrence évidente, on obtient :

$$a_n = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

En faisant tendre n vers l'infini (la convergence étant acquise) on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Or les termes de rang impair de (b_n) sont nuls, ôtons-les de la somme :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

(k est une variable muette que l'on peut renommer n) :

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

La limite de (b_n) est nulle car les termes pairs valent $\frac{1}{2^n}$ et donc tendent vers 0, et les termes impairs sont nuls, donc tendent aussi vers 0. Comme $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ est une partition de l'univers, on a

$$1 = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = a_n + b_n + c_n + d_n$$

L'égalité passe à la limite et donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1 - 0 - 0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

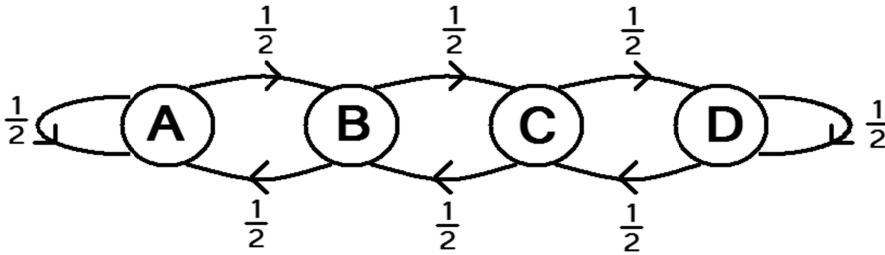
Partie 2

1) Les probabilités conditionnelles qui changent par rapport à celles de la partie 1 sont :

$P(A_{n+1}/A_n) = \frac{1}{2}$, $P(B_{n+1}/A_n) = \frac{1}{2}$, $P(D_{n+1}/D_n) = \frac{1}{2}$, $P(C_{n+1}/D_n) = \frac{1}{2}$. Les probabilités totales donnent alors les relations (on ne détaille pas les calculs similaires) :

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}$; $b_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c_n}{2}$; $c_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{d_n}{2}$ et $d_{n+1} = \frac{c_n}{2} + \frac{d_n}{2}$; ce qui donne bien la relation matricielle $X_{n+1} = M X_n$, avec la matrice donnée par l'énoncé.

Il s'agit de la matrice de transition associée au graphe probabiliste suivant :



X_0 est le vecteur colonne de coordonnées a_0, b_0, c_0 et d_0 soit 0; 1; 0 et 0.

2) Le polynôme caractéristique de M est

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I_4) = \det\left(\frac{1}{2}(2M - 2\lambda I_4)\right)$$

$$= \frac{1}{2^4} \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{16} (1 - 2\lambda) \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{16} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{on a développé le déterminant suivant la première ligne})$$

$$= \frac{1}{16} (1 - 2\lambda) (4\lambda^2(1 - 2\lambda) + 2\lambda + 2\lambda - 1) - \frac{1}{16} (-2\lambda(1 - 2\lambda) - 1)$$

(on a utilisé la règle de Sarrus pour développer le premier déterminant d'ordre 3, et on a développé suivant la première ligne le second déterminant)

$$= \frac{1}{16} [(1 - 2\lambda)(4\lambda^2 - 8\lambda^3 + 4\lambda - 1) + 2\lambda - 4\lambda^2 + 1]$$

$$= \frac{1}{16} (16\lambda^4 - 16\lambda^3 - 8\lambda^2 + 8\lambda) = \frac{\lambda}{2} (2\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1) \quad (\text{comme } \lambda = 1 \text{ est une}$$

racine évidente, on factorise par $\lambda - 1$)

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{2}(2\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1)) = \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)(2\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - \frac{1}{2}) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}})(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M les racines de P , donc $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 .

3) La matrice M est de rang 4 et admet quatre valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. Soit B' une base propre de l'endomorphisme associé à M (telle que son premier vecteur soit associé à la plus petite valeur propre, le deuxième vecteur à la valeur propre suivante, et ainsi de suite) et P la matrice de passage de la base canonique à B' : alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$ la matrice (diagonale) de l'endomorphisme précédent dans B' .

4) Ces propriétés se démontrent aisément par récurrence, et cela a déjà été fait dans un autre sujet de ce chapitre.

5) La puissance d'une matrice diagonale l'est aussi et s'obtient en élevant à la puissance les éléments diagonaux, donc $D^n = \text{diag}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n; 0; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n; 1)$. Or q^n tend vers 0 (lorsque n tend vers l'infini) si q est compris strictement entre -1 et 1 , donc D^n tend vers $\text{diag}(0; 0; 0; 1)$ notée D^∞ : elle converge donc. Le produit par des constantes passe à la limite, et $X_n = M^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P D^n P^{-1} X_0 = P D^\infty P^{-1} X_0$: c'est le vecteur X . Ses coordonnées a, b, c et d sont les limites de celles de X_n , donc ce sont les limites des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) , qui convergent donc.

6) L'égalité $X_{n+1} = M X_n$ donne, lorsque n tend vers l'infini (et puisqu'il y a convergence) $X = MX$; on peut aussi obtenir cette égalité de manière plus élémentaire en prenant la limite de chaque relation vue à la question 1

$$(a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \text{ donne à la limite } a = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \text{ etc.}).$$

$2X = 2MX$ équivaut au système d'équations : $2a = a + b$; $2b = a + c$; $2c = b + d$; $2d = c + d$; qui donne $a = b = c = d$. Comme $a + b + c + d = 1$ (probabilité totale) alors $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Sujet 3 - Variable aléatoire à densité

► Énoncé

1) En utilisant la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ déterminez $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ puis, en utilisant la parité de la fonction intégrée, démontrez que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Montrez que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire. On note L la loi correspondant à la densité f .

3) Si X suit la loi L , calculez $E(X)$ grâce à une intégration par parties.

4) On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes suivant la Loi L , et on définit la variable Z ainsi : Si ω est un événement, $Z(\omega)$ est le plus grand des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. On note $Z = \sup(X, Y)$. En utilisant la propriété $(Z \leq r) \Leftrightarrow (X \leq r) \cap (Y \leq r)$ déterminez la fonction de répartition F_Z de Z .

5) Montrez que sa densité est $f_Z(x) = 4x(e^{-x^2} - e^{-2x^2})$ (pour x positif).

6) Calculez l'espérance de Z , et comparez-la à celle de X .

► Commentaire

Ce sujet s'intéresse à une loi voisine de la loi normale, ce qui donne l'occasion de montrer son savoir-faire concernant cette loi très importante ; cela peut gêner des candidats n'ayant pas une bonne vision des calculs (il est ici facile de perdre son temps dans des calculs inutiles).

L'autre difficulté du sujet est la présence d'une variable aléatoire obtenue comme borne supérieure de deux autres : le candidat n'ayant jamais vu cela (ce qui est possible, car ce sujet n'est pas si fréquent) risque d'être déstabilisé, même si la propriété permettant de s'en sortir est heureusement donnée par l'énoncé.

CORRIGÉ

1) On se rappelle que la loi normale d'espérance nulle et d'écart-type σ a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, ce qui implique que $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$. Avec $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cela donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. La fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ est égale à celle sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ (car il y a convergence), et donc vaut la moitié de son intégrale sur tout \mathbb{R} , ce qui donne le résultat demandé.

2) On montre facilement que la fonction f est continue (continue par morceaux aurait suffi), positive et que l'intégrale sur tout \mathbb{R} vaut 1 :
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = 0 + [-e^{-x^2}]_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} + e^0 = 1$.
 Cela permet de conclure que f peut être la densité d'une variable aléatoire.

3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x \times 2xe^{-x^2} dx$ on procède de nouveau par intégration par parties, en dérivant x et intégrant l'autre facteur.
 $E(X) = [-xe^{-x^2}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x^2} dx = -\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} + 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après la question 1.

4) On utilise la propriété donnée par l'énoncé, qui caractérise le « sup » de deux nombres.
 $F_Z(r) = P(Z \leq r) = P((X \leq r) \cap (Y \leq r)) = P(X \leq r) P(Y \leq r)$ (car X et Y sont indépendantes)
 $= P(X \leq r)^2 = F_X(r)^2$ (car X et Y suivent la même loi). On peut retenir que $F_Z = F_X \cdot F_Y$ si $Z = \sup(X, Y)$.
 Or, pour r positif, $F_X(r) = \int_0^r 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^r = 1 - e^{-r^2}$ donc
 $F_Z(r) = (1 - e^{-r^2})^2$
 Pour $r < 0$, $F_X(r) = 0$ donc $F_Z(r) = 0$.

5) La fonction densité est la dérivée de la fonction de répartition, donc, si $r < 0$, $f_Z(r) = 0$, et si r est positif, $f_Z(r)$ est la dérivée de $(1 - e^{-r^2})^2$ soit
 $f_Z(r) = 2 \times 2r e^{-r^2} \times (1 - e^{-r^2})$ (par dérivée d'un carré) $= 4r (e^{-r^2} - e^{-2r^2})$, ce qui est le résultat demandé, si l'on change les r en des x .