Résistance des matériaux

Cours et exercices corrigés

Jean-Claude Doubrère

Onzième édition 2010

EYROLLES

Sommaire

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1. NOTIONS DE STATIQUE 3

1.1. Forces et moments de forces . . . 3
1.1.1. Forces . . . 3
1.1.1.1. Notion de forces . . . 3
1.1.1.2. Équilibre d'un solide soumis à des forces concourantes . . . 4
1.1.1.3. Équilibre d'un solide soumis à des forces parallèles . . . 5
1.1.1.4. Types de forces de la résistance des matériaux . . . 7
1.1.2. Moments de forces . . . 8
1.1.2.1. Moment d'une force par rapport à un axe . . . 8
1.1.2.2. Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe . . . 9
1.1.2.3. Théorème des moments . . . 10
1.1.2.4. Les couples de forces . . . 10
1.2. Actions et réactions . . . 11
1.3. Équilibre d'un solide . . . 11
1.4. Notions de statique graphique : dynamiques et funiculaires . . . 13
1.5. Exercices . . . 22
1.5.1. Poutre sur appuis simples : calcul des réactions d'appui . . . 22
1.5.2. Poutre avec double appui simple : calcul des réactions d'appui . . . 23

CHAPITRE 2. MOMENT STATIQUE ET MOMENT D'INERTIE D'UNE SURFACE 25

2.1. Moment statique . . . 25
2.2. Moment d'inertie . . . 27
2.3. Module d'inertie . . . 28

2.4. Tableau des différents moments et modules pour les figures simples 29
2.5. Exercices 33
2.5.1. Calcul du moment et module d'inertie d'un rectangle évidé. . . . 33
2.5.2. Calcul du moment et module d'inertie d'une cornière 34
2.5.3. Calcul du moment et module d'inertie d'un fer en té 35

CHAPITRE 3. GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX 37

3.1. But de la résistance des matériaux. . . . 37
3.2. Notion de contrainte. . . . 37
3.3. Étude expérimentale de la relation entre contraintes et déformations 39
3.4. Contraintes admissibles - Notion de coefficient de sécurité 43
3.5. Exercices 44

CHAPITRE 4. LES POUTRES 45

4.1. Définition d'une poutre. . . . 45
4.2. Forces appliquées aux poutres 46
4.2.1. Forces données. . . . 46
4.2.2. Réactions d'appui 46
4.2.3. Relations entre forces données et réactions d'appui 47
4.3. Première hypothèse fondamentale de la théorie des poutres : principe de Saint-Venant 47
4.3.1. Principe de Saint-Venant 47
4.3.2. Système des forces extérieures à une section 49
4.3.3. Application : poutre droite sur appuis simples 51
4.4. Seconde hypothèse fondamentale de la théorie des poutres : principe de Navier-Bernouilli 53
4.5. Exercice : arc symétrique à trois articulations 53

CHAPITRE 5. CONTRAINTES DUES À L'EFFORT NORMAL ET AU MOMENT FLÉCHISSANT 57

5.1. Étude de l'effort normal. Compression ou traction simple . . . 57
5.2. Étude du moment fléchissant. . . . 58
5.2.1. Flexion pure. . . . 58
5.2.2. Flexion simple 61
5.2.3. Flexion composée 61
5.2.4. Noyau central - Résistance des maçonneries. . . . 63

5.3. Exercices 65
5.3.1. Étude d'une poutre métallique 65
5.3.2. Étude d'une section circulaire 66
5.3.3. Étude d'une fondation 67

CHAPITRE 6. CONTRAINTES PRODUITES PAR L'EFFORT TRANCHANT 71

6.1. Généralités 71
6.2. Calcul de la contrainte de cisaillement 72
6.3. Étude de quelques sections particulières 78
6.3.1. Section rectangulaire de hauteur $2h$ et de largeur b 78
6.3.2. Section circulaire de rayon R 79
6.3.3. Section en double-té symétrique par rapport à l'axe Gz 79
6.4. Exercices 80
6.4.1. Étude d'une poutre de section rectangulaire 80
6.4.2. Poutre de section rectangulaire. Autre section 82

CHAPITRE 7. CONTRAINTES ENGENDRÉES PAR LE MOMENT DE TORSION 83

7.1. Résultats de la théorie de la torsion 83
7.1.1. Section elliptique 83
7.1.2. Section circulaire 84
7.1.3. Section rectangulaire 85
7.2. Exercices 85
7.2.1. Étude d'un barreau circulaire 85
7.2.2. Étude d'une tôle d'acier 86

CHAPITRE 8. POUTRES DROITES ISOSTATIQUES 87

8.1. Poutres sur appuis simples 87
8.1.1. Définition 87
8.1.2. Calcul des efforts et des moments sous une charge concentrée - Lignes d'influence 88
8.1.2.1. Calcul des efforts et des moments 88
8.1.2.2. Lignes d'influence 89
8.1.3. Systèmes de charges concentrées : principe de superposition des charges - Effet d'un convoi - Théorème de Barré 91
8.1.3.1. Systèmes de charges concentrées : principe de superposition des charges. 91
8.1.3.2. Effet d'un convoi - Théorème de Barré 96

8.1.4. Cas de charges réparties 97
8.1.5. Lignes enveloppes 99
8.1.6. Calcul des flèches 101
8.2. Consoles 103
8.2.1. Définition 103
8.2.2. Détermination de l'effort tranchant et du moment fléchissant sous une charge concentrée - Ligne d'influence 103
8.2.3. Cas d'une charge uniformément répartie 105
8.2.4. Calcul des flèches 105
8.3. Étude des poutres consoles 106
8.4. Exercices 107
8.4.1. Poutre sur appuis simples 107
8.4.2. Calcul de la flèche à l'extrémité d'une console 111
8.4.3. Étude d'une poutre console 112

CHAPITRE 9. POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES **115**

9.1. Généralités 115
9.2. Formules valables pour toutes les poutres hyperstatiques . . . 116
9.3. Poutre encastrée à ses deux extrémités 118
9.4. Poutre encastrée à une extrémité, sur appui simple à l'autre 119
9.5. Poutres continues 121
9.6. Cas particulier des bâtiments courants en béton armé 123
9.6.1. Domaine d'application 124
9.6.1.1. Principe de la méthode 124
9.6.1.2. Conditions d'application de la méthode - Valeurs des coefficients 124
9.7. Exercices 125
9.7.1. Poutre encastrée à une extrémité, sur appui simple à l'autre 125
9.7.2. Poutre continue à deux travées égales 126
9.7.3. Poutre continue à trois travées égales 128
9.7.4. Poutre continue à quatre travées égales 130

CHAPITRE 10. SYSTÈMES RÉTICULÉS ISOSTATIQUES **131**

10.1. Définitions 131
10.2. Méthode des nœuds - Épure de Crémona 132
10.3. Méthode des sections 136
10.4. Exercice : poutre triangulée 138

CHAPITRE 11. STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE 143

11.1. Introduction 143
11.2. Poutre sur appuis simples, de section constante, comprimée et fléchie 144
11.3. Flambement des poutres droites de section constante 145
11.3.1. Poutre articulée à ses extrémités 145
11.3.2. Poutres soumises à des conditions aux limites diverses. 146
11.3.3. Sécurité vis-à-vis du flambement - Contraintes admissibles 148
11.4. Prescriptions des règlements en vigueur 148
11.4.1. Règlements relatifs aux constructions metalliques 149
11.4.1.1. Règles de calcul des constructions en acier : Règles CM 1966 et l'additif 80 149
11.4.1.2. Cahier des prescriptions communes applicables aux marchés de travaux publics passés au nom de l'État, fascicule 61, titre V : Conception et calcul des ponts et constructions métalliques en acier 150
11.4.2. Règlement relatif au béton armé 150
11.5. Exercices. 151
11.5.1. Barre d'acier de section rectangulaire 151
11.5.2. Poteau comprimé 153

ANNEXE A. RAPPELS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE 157

A.1. Fonction dérivée 157
A.1.1. Exemple : fonction linéaire 158
A.1.2. Exemple : fonction du second degré. 158
A.1.3. Exemple : fonction de degré *n*. 158
A.1.4. Dérivées d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient de fonctions dérivables. 158
A.1.5. Dérivée d'une fonction de fonction 159
A.1.6. Rappel de quelques dérivées de fonctions 159
A.1.7. Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable. 159
A.2. Notion d'intégrale définie. 159
A.2.1. Propriétés de l'intégrale définie. 160
A.2.2. Fonction définie par une intégrale 160
A.3. Fonctions primitives. 161
A.3.1. Définition 161
A.3.2. Fonction primitive de valeur donnée en un point donné 161
A.3.3. Relation entre intégrale définie et primitive 162
A.3.4. Intégrale indéfinie 162

A.3.5. Recherche des fonctions primitives d'une fonction donnée 162
A.3.5.1. Fonctions primitives usuelles 162
A.3.5.2. Intégration par parties 165
A.3.6. Aire d'une surface plane 165
A.4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 166
A.4.1. Équations du premier ordre 166
A.4.2. Exemples d'équations différentielles du second ordre 166

ANNEXE B. SYMBOLES ET NOTATIONS 169

1 Notions de statique

1.1. Forces et moments de forces

1.1.1. Forces

1.1.1.1. Notion de forces

Quelle que soit leur nature, et quelle que soit la façon dont elles se manifestent (à distance ou au contact de deux corps), les forces (par exemple le poids d'un corps), sont, en résistance des matériaux comme en physique traditionnelle, des *grandeurs vectorielles*.

Il faut donc, chaque fois que l'on considère une force, rechercher :
- la droite d'action (la direction),
- le sens,
- le point d'application,
- l'intensité.

• La droite d'action

Si une force s'exerce, par exemple, par l'intermédiaire d'un fil tendu, la droite d'action de la force est celle que matérialise le fil. De même, si une force est transmise par une tige rigide, cette tige matérialise la droite d'action de la force.

• Le sens

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire ; si force et mouvement sont dans le même sens la force est dite *motrice* ; dans le cas contraire, la force est dite *résistante*. Par exemple, les forces de frottement sont des forces résistantes.

• Le point d'application

Si un solide est tiré par un fil ou poussé par une tige rigide, le point d'application est le point d'attache du fil ou le point de contact de la tige.

Dans le cas du poids d'un corps, le point d'application est le centre de gravité de ce corps.

• L'intensité

L'intensité mesure la grandeur de la force. Elle s'exprime en Newton (N).

1.1.1.2. Équilibre d'un solide soumis à des forces concourantes

Nous considérerons successivement des forces opposées (supportées par le même axe), et des forces concourantes (dont les lignes d'action passent par un même point).

Deux forces égales mais opposées s'équilibrent.

En effet, les vecteurs qui les représentent sont des vecteurs glissants opposés, dont la somme est nulle.

L'équilibre des appuis ou des fixations amène ainsi à envisager l'existence de forces de liaison (ou de réaction) opposées aux forces de sollicitation.

Par exemple, dans le cas du point d'attache B de la figure 1.1, sollicité par la traction du fil, l'équilibre du système n'est possible que s'il existe, au point B, une réaction $\vec{R}$ égale, mais opposée, à la force de sollicitation $\vec{F}$.

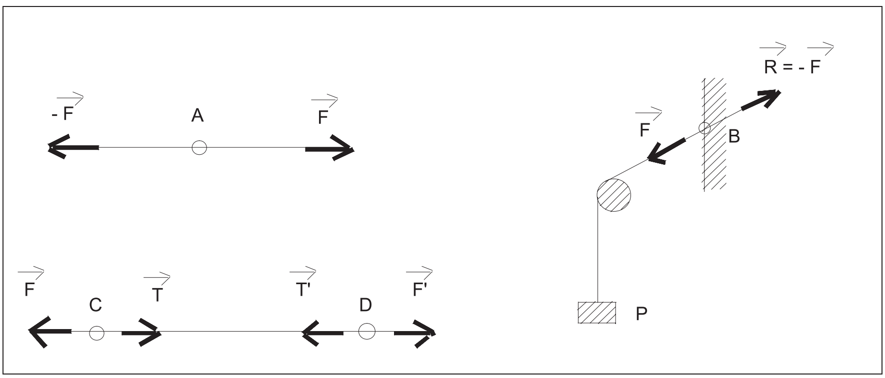

Figure 1.1. *Forces opposées.*

De la même façon, considérons un fil non pesant tendu grâce à l'action de deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, égales et opposées, appliquées respectivement en C et D ; l'équilibre des points C et D justifie l'existence, en ces points, de forces de liaison $\vec{T}$ et $\vec{T}'$, égales et opposées à $\vec{F}$ et $\vec{F}'$.

L'intensité *égale* de ces forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ mesure la *tension* du fil.

• Forces concourantes

Ce sont des forces dont les droites d'action passent par le même point.

La résultante $\vec{R}$ de forces concourantes est représentée vectoriellement par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs figurant ces forces.

L'abscisse du vecteur résultant est égale à la somme des abscisses des vecteurs composants. Il en est de même en ce qui concerne les ordonnées (figure 1.2).

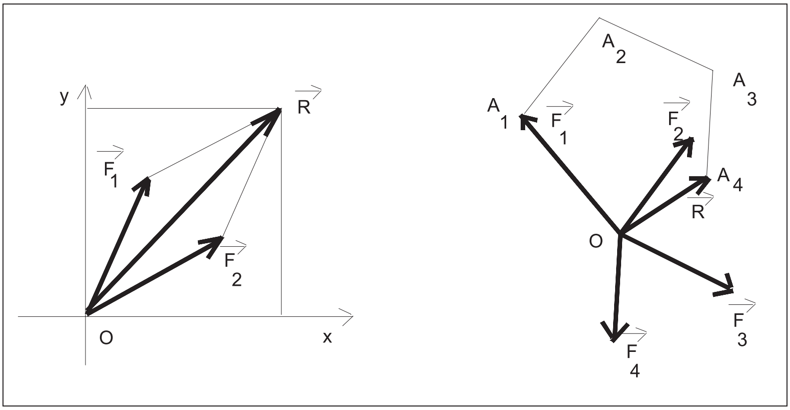

Figure 1.2. *Forces concourantes.*

Inversement, on peut décomposer une force $\vec{F}$ en deux forces composantes concourantes portées par deux axes OX et OY, en reconstituant le parallélogramme précédent.

Si un solide est soumis à plusieurs forces concourantes, on détermine la résultante de l'ensemble en construisant le *polygone des forces*. Par exemple, dans le cas de la figure 1.2, à partir de l'extrémité A_1 du vecteur $\vec{F}_1$, on porte un vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$, **équipollent** [2] à $\vec{F}_2$. À partir de A_2, on porte un vecteur équipollent à $\vec{F}_3$, etc. Le vecteur $\overrightarrow{OA_4}$ ainsi obtenu est la résultante des quatre forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$.

1.1.1.3. Équilibre d'un solide soumis à des forces parallèles

• Forces de même sens

La résultante de deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ parallèles et de même sens est une force parallèle à ces deux forces, de même sens qu'elles, et d'intensité égale à la somme de leurs intensités (figure 1.3, page suivante) :

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B . \tag{1.1}$$

2. Un vecteur *équipollent* à un autre vecteur est un vecteur de même intensité et de même sens, placé sur la même droite d'action ou sur une droite d'action parallèle.

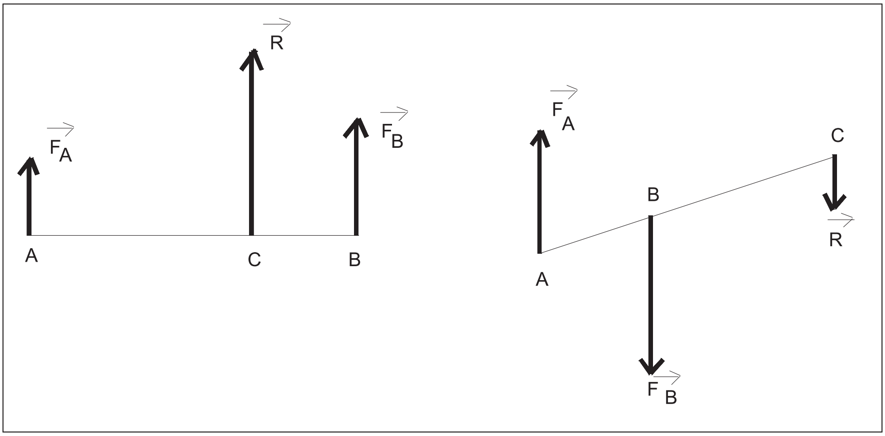

Figure 1.3. *Forces parallèles de même sens (à gauche) et de sens contraires (à droite).*

D'autre part, le point d'application de la résultante $\vec{R}$ est un point C situé sur le segment AB, entre A et B, tel que :

$$\vec{F}_A \times CA = \vec{F}_B \times CE$$

• Forces parallèles et de sens contraires

Deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ parallèles et de sens contraires (figure 1.3) admettent une résultante $\vec{R}$ parallèle à ces forces, du sens de la plus grande, et d'intensité égale à la différence de leurs intensités :

$$\vec{R} = \vec{F}_B - \vec{F}_A \tag{1.2}$$

D'autre part, le point d'application de la résultante $\vec{R}$ est un point C situé sur la droite AB, à l'extérieur du segment AB, du côté de la plus grande composante, et tel que :

$$|\vec{F}_A \times CA| = |\vec{F}_B \times CB$$

• Composition de forces parallèles

Pour composer un nombre quelconque de forces parallèles, il faut d'abord considérer toutes les forces de même sens, et on les compose deux par deux jusqu'à trouver leur résultante en appliquant la règle (1.1).

Puis il faut réitérer la même opération pour toutes les forces de l'autre sens en appliquant également la règle (1.1).

On obtient ainsi deux résultantes partielles, parallèles et de sens contraires, auxquelles on applique la règle (1.2). La résultante générale passe par un point appelé *centre des forces parallèles.*

Si les deux résultantes partielles ont la même intensité, elles constituent un *couple* de forces.

• Propriétés d'un centre de gravité

Le *centre de gravité* G d'un solide, point d'application de son poids, a les propriétés d'un centre de forces parallèles.

1.1.1.4. Types de forces de la résistance des matériaux

Nous ne considérerons dans la suite de l'ouvrage, que des forces situées dans un plan, ce plan étant en général un plan de symétrie vertical de l'ouvrage étudié, (par exemple, le plan de symétrie d'une poutre de section en forme de té, comme indiqué sur la figure 1.4).

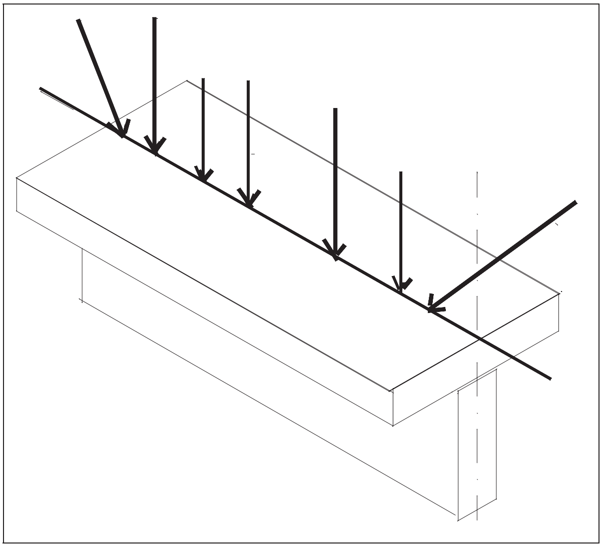

Figure 1.4. *Forces appliquées à une poutre à plan moyen.*

Les forces appliquées aux ouvrages peuvent être :

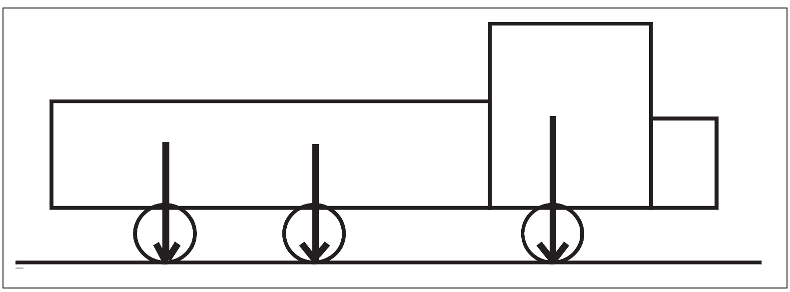

Figure 1.5. *Charges concentrées.*

– soit des forces dites *concentrées* (par exemple, la réaction donnée par une articulation, ou encore l'action d'une roue d'un véhicule). Ces forces sont appliquées en réalité sur une petite surface, mais sont assimilées, le plus souvent pour le calcul, à des forces ponctuelles ;

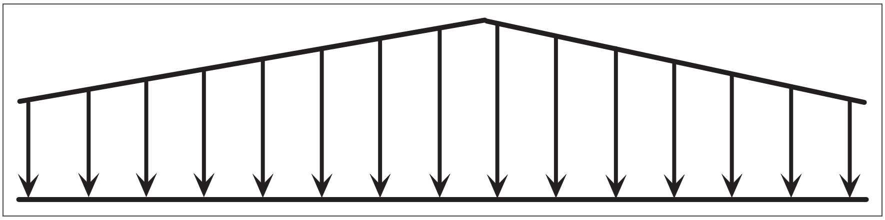

Figure 1.6. *Charges réparties.*

– soit des forces dites *réparties* (par exemple, le poids propre d'une poutre ou la surcharge correspondant à une couche de neige).

Les forces, représentées par des vecteurs, sont comptées **positivement** si elles sont dirigées du bas vers le haut, et **négativement** dans le cas contraire.

1.1.2. Moments de forces

1.1.2.1. Moment d'une force par rapport à un axe

Faisons l'expérience suivante :

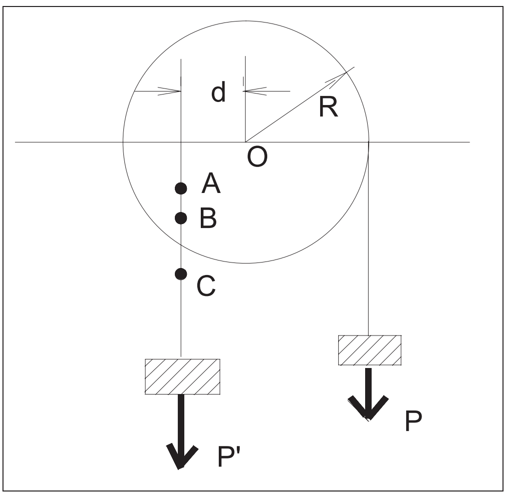

Figure 1.7. *Moment d'une force par rapport à un axe.*

Une roue à gorge de centre O et de rayon R (figure 1.7) est placée de manière à tourner librement autour de l'axe horizontal perpendiculaire en O au plan de la figure.

Un fil entouré autour de la gorge et fixé à celle-ci par l'une de ses extrémités, supporte à son autre extrémité un poids $\vec{P}$.

Sous l'action de ce poids, la roue a tendance à tourner dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Pour l'empêcher de tourner, il faut attacher en un point quelconque A, par l'intermédiaire d'un autre fil, un poids $\vec{P}'$ d'intensité suffisante. On obtient ainsi un équilibre *stable*. En effet si l'on écarte la roue de cette position d'équilibre, en la faisant tourner légèrement dans un sens ou dans l'autre, elle y revient d'elle-même après quelques oscillations.

Si l'on transporte le point d'attache du poids $\vec{P}'$ en un autre point B ou C, *situé sur la verticale* de A, l'équilibre subsiste.

D'autre part, on constate que le produit $P' \times d$ est égal au produit $P \times R$. Les produits $P' \times d$ et $P \times R$ représentent les *moments* des poids $\vec{P}'$ et $\vec{P}$ par rapport à l'axe de rotation.

1.1.2.2. Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe

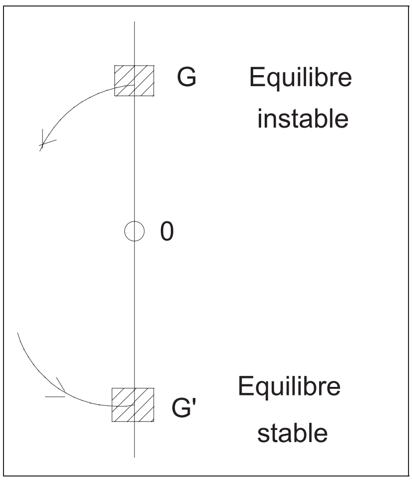

Figure 1.8. *Positions d'équilibre.*

Un solide mobile autour d'un axe horizontal est en équilibre lorsque son centre de gravité est situé dans le plan vertical passant par l'axe. Généralement, on obtient ainsi deux positions d'équilibre (figure 1.8) :
– une pour laquelle le centre de gravité est situé *au-dessus* de l'axe : l'équilibre correspondant est *instable* ;
– une pour laquelle le centre de gravité est situé *au-dessous* de l'axe : l'équilibre correspondant est *stable*.

1.1.2.3. Théorème des moments

Un solide mobile autour d'un axe est en équilibre quand la somme des moments, pris par rapport à cet axe, des forces qui tendent à le faire tourner dans un sens est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

On trouve une application de ce théorème dans l'équilibre des balances, mais également dans l'équilibre de certaines poutres.

1.1.2.4. Les couples de forces

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus au paragraphe 1.1.1.3 *un couple est un ensemble de deux forces parallèles, de sens contraire et de même intensité*. Le plan qui contient les droites d'action des deux forces du couple est appelé *plan du couple*.

Considérons un solide mobile autour d'un axe O (figure 1.9). Appliquons à ce mobile un couple de forces dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation du solide.

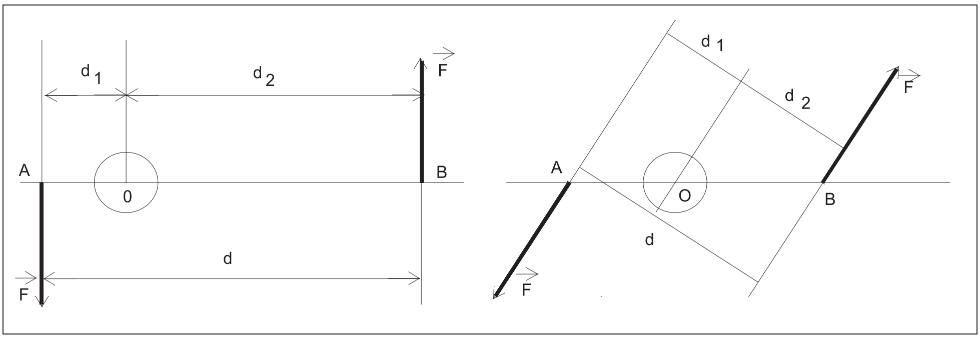

Figure 1.9. *Couples de forces.*

Diverses expériences montrent que l'effet du couple sur le solide est indépendant de la position des droites d'action des forces du couple par rapport à l'axe de rotation, *pourvu que la distance* d *de ces droites d'action ne change pas*.

On retrouve aisément ce résultat par le calcul. En effet :
- s'agissant d'un couple, la résultante générale des forces est nulle,
- quant au moment, il est égal à $d_1 \times F + d_2 \times F = (d_1 + d_2) \times F = d \times$, quelles que soient les valeurs respectives de d_1 ou de d_2.

On constate donc que le *moment d'un couple* de forces est *le produit de la distance des droites d'action des deux forces* [3] *par leur intensité commune*.

D'autre part, si l'on fait varier simultanément la force $\vec{F}$ et la distance *d*, de telle façon que le produit $d \times F$ reste constant, l'effet du couple reste le même ; il en résulte que *la grandeur caractéristique d'un couple est son moment*.

L'unité de moment est le mètre × Newton (mN).

3. Distance appelée souvent « bras de levier du couple ».

Le moment d'une force est positif si la force est dirigée vers la droite pour un observateur situé au point par rapport auquel est pris le moment, négatif si elle est dirigée vers la gauche [4].

1.2. Actions et réactions

Considérons une masse ponctuelle quelconque ; celle-ci est en équilibre :
- soit si elle n'est soumise à aucune action (ou force) ;
- soit si la somme des actions (ou forces) qui lui sont appliquées est nulle.

Ainsi, une petite boule placée sur un sol horizontal reste en équilibre parce que le sol exerce sur la petite surface de contact qu'il a avec cette boule une réaction $\vec{R}$ égale et opposée au poids de la boule (schéma de gauche de la figure 1.10).

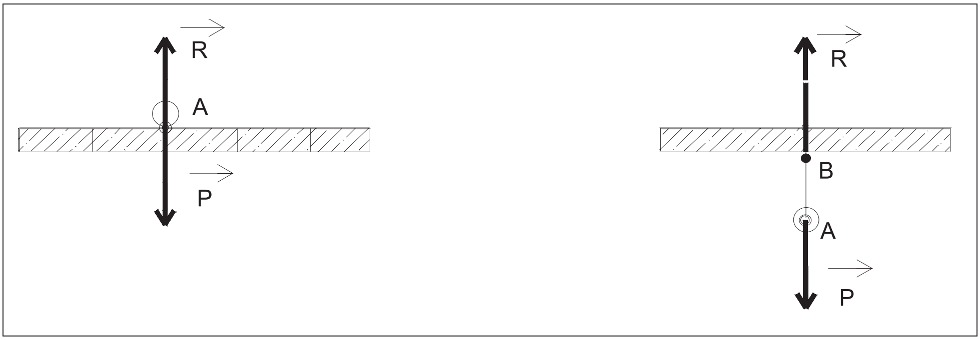

Figure 1.10. *Action et réaction.*

De même, une boule A attachée en B par un fil, exerce sur le point d'attache B une action dirigée vers le bas, égale au poids $\vec{P}$ de la boule (si l'on néglige le poids du fil). Il y aura équilibre si l'attache B maintient une réaction $\vec{R}$ égale et opposée au poids $\vec{P}$ de la boule (schéma de droite de la figure 1.10).

Remarquez au passage que l'égalité s'établit bien ici entre vecteurs glissants, les origines étant différentes, mais le support étant évidemment le même.

1.3. Équilibre d'un solide

Si, pour une masse ponctuelle, comme précédemment, toutes les forces appliquées à cette masse peuvent se ramener à une seule force passant par le point représentatif de la masse, et appelée *résultante*, il n'en est pas de même pour un corps solide. En

4. Signalons que le signe ainsi défini pour les moments est, en résistance des matériaux, l'opposé de celui adopté habituellement en mécanique rationnelle.

effet celui-ci est composé d'un grand nombre de masses quasi ponctuelles, à chacune desquelles est appliquée une force unique.

On démontre que l'ensemble de ces forces peut se ramener à :
– une force unique (*résultante générale*) ;
– et un couple (dont le moment est appelé *moment résultant*).

On démontre également que les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un solide indéformable [5] sont exprimées par les deux conditions suivantes :
– la résultante générale des forces (actions et réactions) appliquées à ce solide **est nulle**.
– le moment résultant de toutes ces forces (actions et réactions), pris *par rapport à un point quelconque*, **est nul**.

Dans le cas particulier de forces situées dans un même plan vertical, ces deux conditions s'expriment par trois équations :
– la somme des projections des forces sur un axe horizontal Ox du plan **est nulle**.
– la somme des projections des forces sur axe vertical O*y* du plan **est nulle**.
– la somme des moments pris par rapport à un point quelconque du plan **est nulle**.

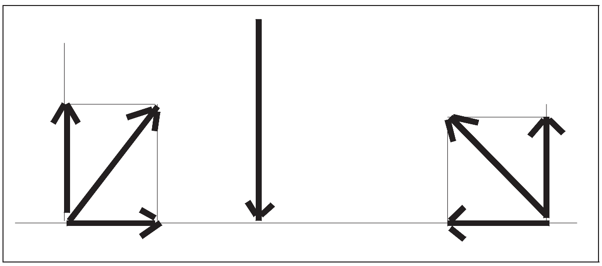

Figure 1.11. *Forces en équilibre dans un plan vertical.*

Lorsque le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations d'équilibre, le système est *isostatique*. Dans le cas où le nombre d'inconnues est supérieur à ce nombre d'équations, il n'est pas possible de résoudre le problème par les seules équations de la statique : le système est *hyperstatique* [6].

☞ Remarque

1° Dans le cas où les forces sont toutes horizontales il n'y a plus que deux équations.
2° Il n'y a qu'une seule équation des moments ; toutefois il peut être intéressant, pour le calcul, de déterminer l'équilibre des moments successivement par rapport à deux points différents. Il ne s'agit pas alors d'une équation supplémentaire, mais d'une combinaison des équations relatives à l'équilibre des moments et à l'équilibre des forces.

5. La qualité d'indéformabilité du solide est indispensable, tout au moins pendant la durée de l'équilibre considéré, sinon le point d'application des différentes forces se déplacerait et la valeur du moment résultant varierait.
6. Pourtant nous verrons par la suite qu'il est possible de résoudre les problèmes en utilisant la notion de déformation infinitésimale des ouvrages considérés.

3° De la même façon qu'il y a des réactions d'appui, il peut exister des moments d'appui (appelés aussi moments d'encastrement).

Par exemple, dans le cas d'une console encastrée en A dans un mur (figure 1.12), l'équilibre ne peut être obtenu que s'il existe, à la fois :

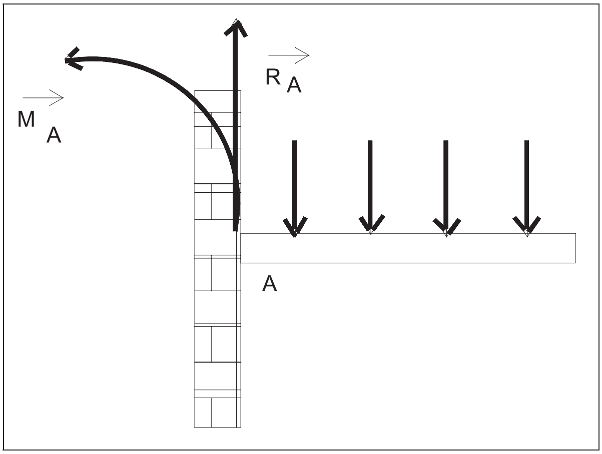

Figure 1.12. *Console encastrée dans un mur.*

– une réaction $\vec{R}_A$ dirigée vers le haut, s'opposant à la chute de la console ;
– un moment d'encastrement $\vec{M}_A$, négatif, s'opposant à la rotation de la console vers la droite, sous l'effet des forces qui lui sont appliquées.

1.4. Notions de statique graphique : dynamiques et funiculaires

Nous allons examiner une méthode graphique de composition des forces selon plusieurs cas de figure distincts.

Polygone de VARIGNON

Rappelons qu'un tel polygone (appelé aussi *polygone dynamique* ou, plus simplement, *dynamique*) se construit en ajoutant les vecteurs représentatifs des différentes forces, à partir d'un point de départ A.

a) Prenons le cas de forces issues d'un même point :

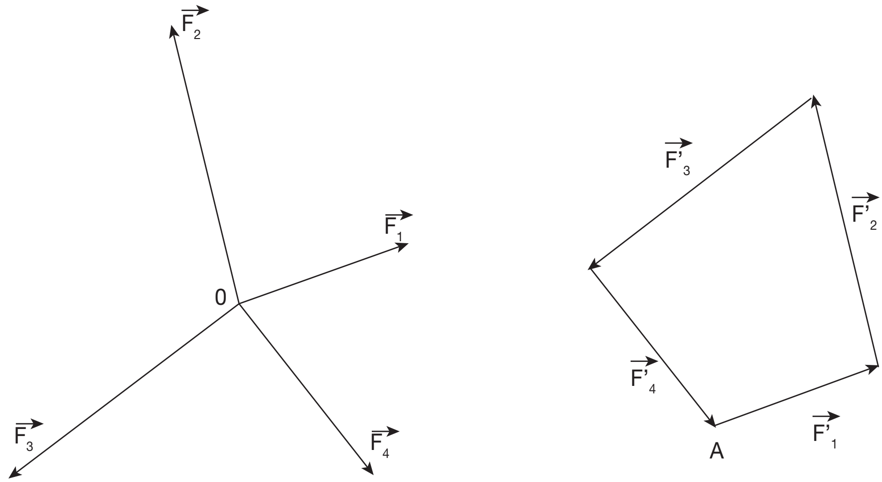

Figure 1.13.

Dans le cas ci-dessus, le dynamique est fermé : la résultante des forces est donc nulle ce qui indique que le système des 4 forces est en équilibre. Nous retrouverons ce cas un peu plus loin dans l'étude des systèmes réticulés plans.

Forces concourantes

En général le système n'est pas en équilibre et les forces admettent une résultante.

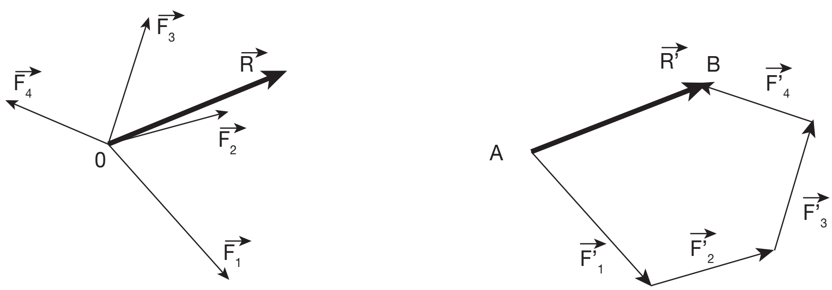

Figure 1.14.

Considérons les 4 forces du dessin de gauche de la figure 1.14 et construisons le dynamique (dessin de droite).

Ce dynamique démarre au point A et se termine au point B : il est donc ouvert, ce qui est normal, puisque les forces admettent une résultante.

Si l'on considère le vecteur qui ferme le dynamique, nous avons alors un système en équilibre et l'on peut écrire :

++++= 0

Il en résulte que le vecteur est **égal et opposé** à la résultante des forces.

On a donc =

Forces non concourantes

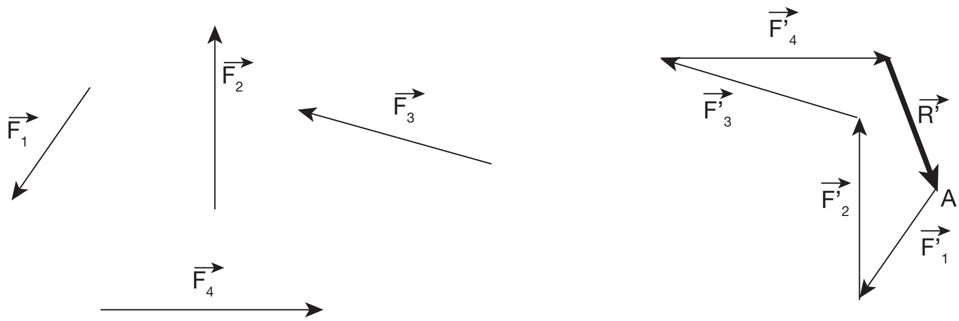

Figure 1.15.

Considérons les quatre forces du dessin de gauche de la figure 1.15.

Le dynamique (dessin de droite) permet de déterminer un vecteur équipollent à la résultante des forces, comme nous l'avons vu précédemment pour les forces concourantes.

Pour autant, on ne connaît pas la position de la droite support de la résultante.

Pour la déterminer, nous allons établir une construction appelée *polygone funiculaire* (du latin *funiculus* : cordelette).

D'un point O quelconque du plan, on joint les extrémités du polygone des forces de la figure 1.15.

On obtient ainsi des segments de droite : Oa_1, Oa_2, …Oa_5 que l'on appelle *rayons vecteurs*.

La figure 1.16 constituée par le dynamique, le pôle O et les rayons vecteurs s'appelle la *figure réciproque*.

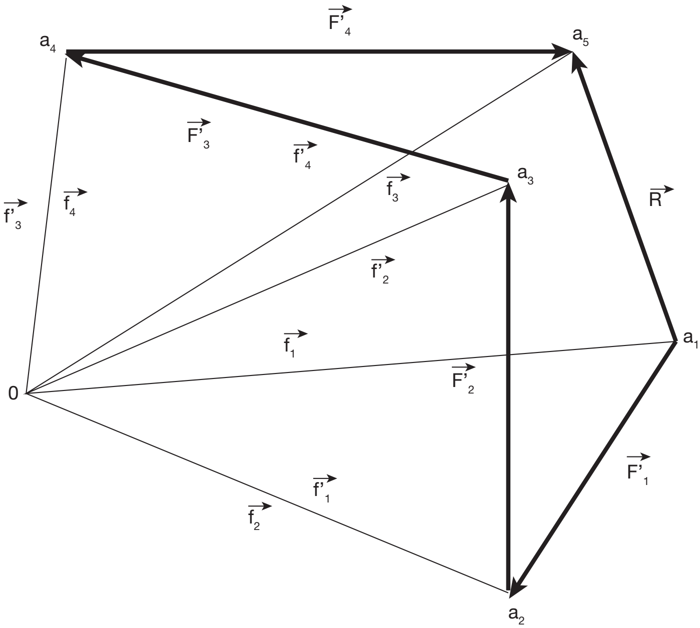

Figure 1.16.

Pour construire le funiculaire, on considère un point quelconque A du plan, à partir duquel on mène une parallèle AA_1 au rayon vecteur Oa_1 que l'on arrête au point A_1 d'intersection avec la droite support de la force.

À partir de A_1, on mène une parallèle $A_1 A_2$ au rayon vecteur Oa_2 que l'on arrête à son intersection A_2 avec la droite support de la force, et ainsi de suite.

De la même manière qu'il existe une infinité de figures réciproques, puisque le choix du point O est libre, il existe une infinité de funiculaires (et même une double infinité, puisque le choix du point de départ A est aussi libre).

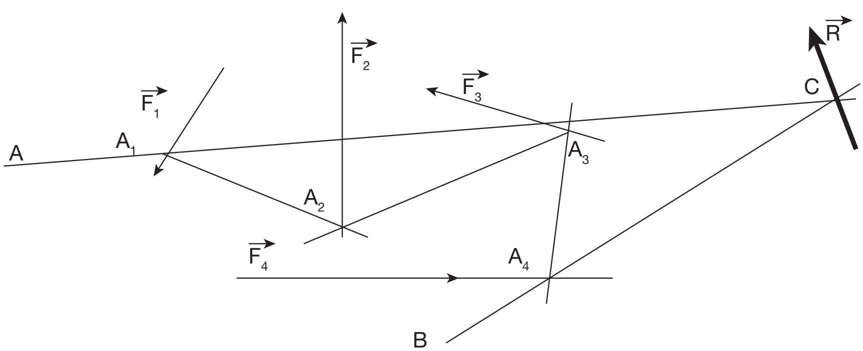

Figure 1.17.

Détermination de la résultante du système de forces

Sur la figure 1.16, la résultante des forces est représentée par le vecteur qui ferme le dynamique. Si nous arrivons à déterminer un point de la droite support, nous aurons déterminé la position de la résultante.

Reprenons la figure réciproque (fig. 1.16) : si nous supposons que les vecteurs et représentent des forces et, nous voyons immédiatement que la résultante de ces deux forces est la force représentée sur le dynamique par le vecteur (fig. 1.18).

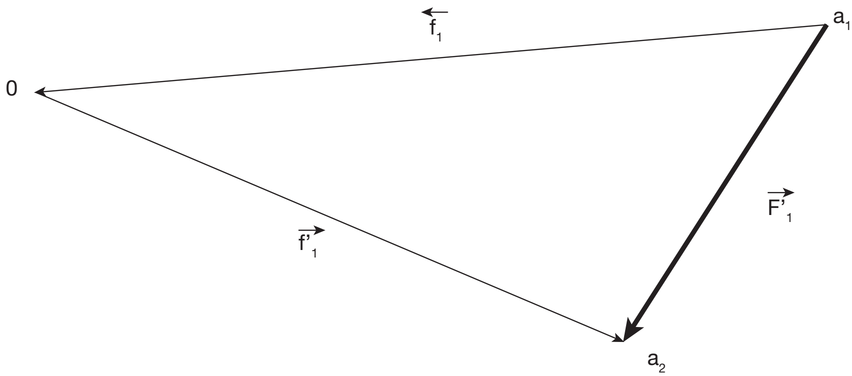

Figure 1.18.

De même pour les forces et, dont la résultante est la force, etc.

Si nous revenons au polygone funiculaire, nous ne changerons pas les conditions d'équilibre du système, si nous remplaçons la force par les deux forces et, l'une portée par le support A A_1 et l'autre par le support A A_2 ; et ainsi de suite.

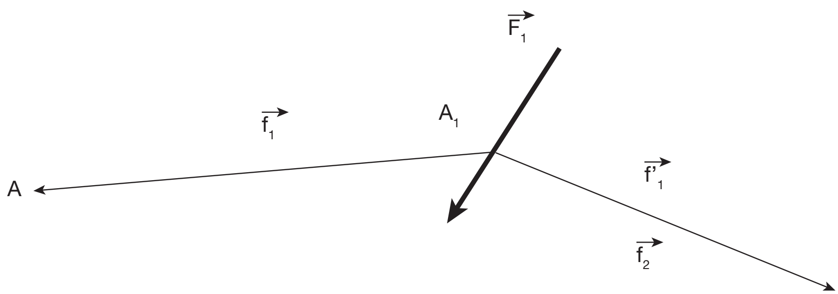

Figure 1.19.

Il y a donc équivalence entre les systèmes de forces :

{,, et } et {,,,, etc.}

Mais les forces et sont égales (elles ont la même grandeur Oa_2) et opposées. Elles s'annulent donc l'une l'autre, et de même pour les forces et, etc.

Finalement, il ne reste plus sur le funiculaire que 2 forces : et, système équivalent au système des 4 forces initiales {,, et}.

On retrouve bien ce résultat en considérant le triangle Oa_1a_5 de la figure réciproque :

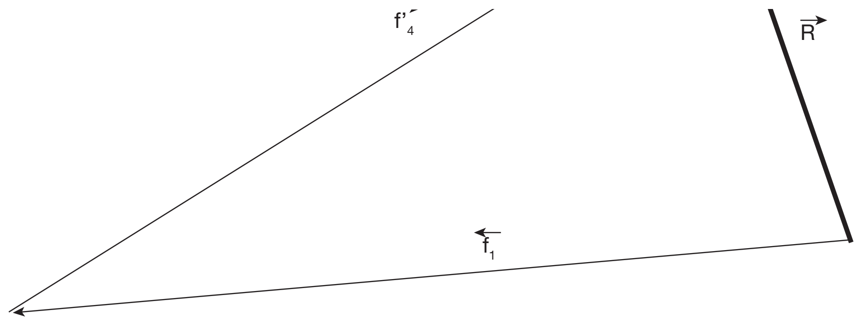

Figure 1.20.

De ce fait, la résultante du système précédent passe par l'intersection des forces et, c'est-à-dire par **le point de concours des côtés extrêmes du funiculaire**.

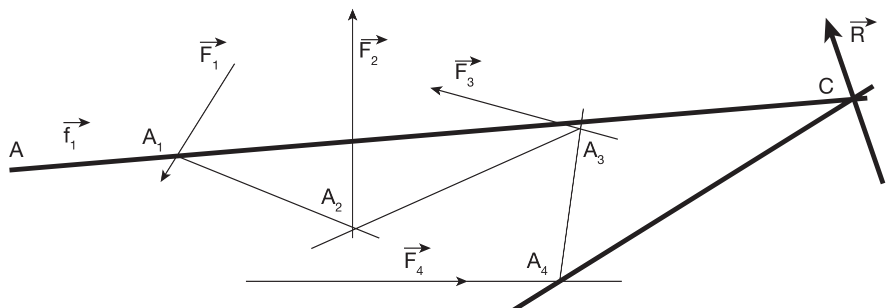

Figure 1.21.

On peut résumer la démonstration précédente de la façon suivante :

Si l'on construit un dynamique, puis un funiculaire d'un système de forces, la résultante de ce système passe par le point d'intersection des côtés extrêmes du funi-

culaire, et elle est égale, parallèle et de même sens que la force représentée par la fermeture du dynamique.

Différents cas de figure sont possibles :

1er cas : le dynamique est ouvert ainsi que le funiculaire : c'est le cas général ; le système admet une résultante.

2ème cas : le dynamique est fermé ainsi que le funiculaire : la résultante est nulle et le système est en équilibre.

3ème cas : le dynamique est fermé et le funiculaire est ouvert.

Nous allons prendre un exemple :

On considère le système de 3 forces ci-dessous :

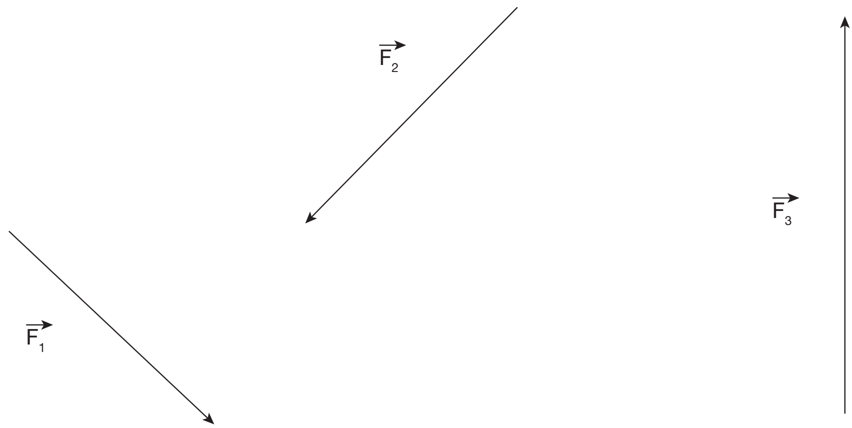

Figure 1.22.

Nous allons construire le dynamique et le funiculaire des ces trois forces.

Tout d'abord, le dynamique.

Nous constatons qu'il est fermé.

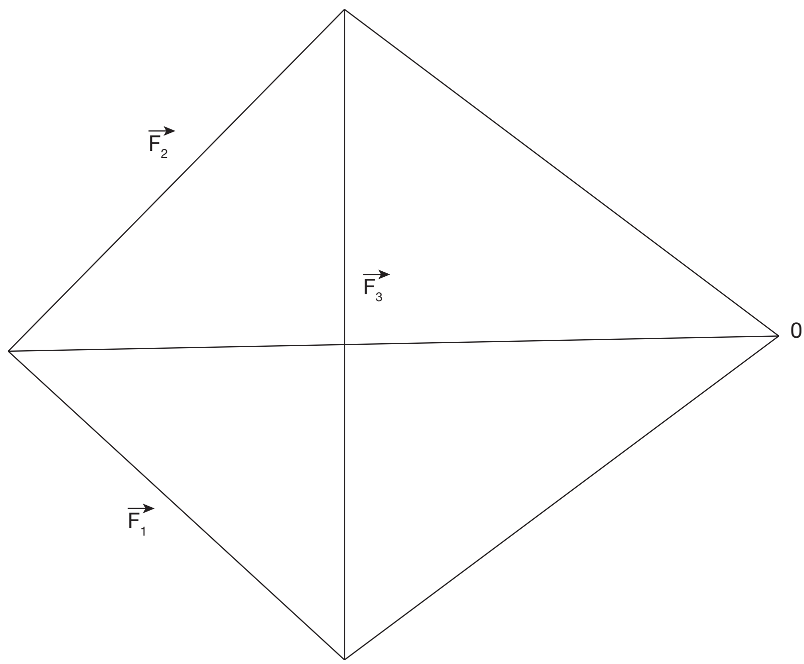

Figure 1.23.

Ensuite, le funiculaire :

Nous constatons que les deux droites extrêmes du funiculaire sont parallèles.

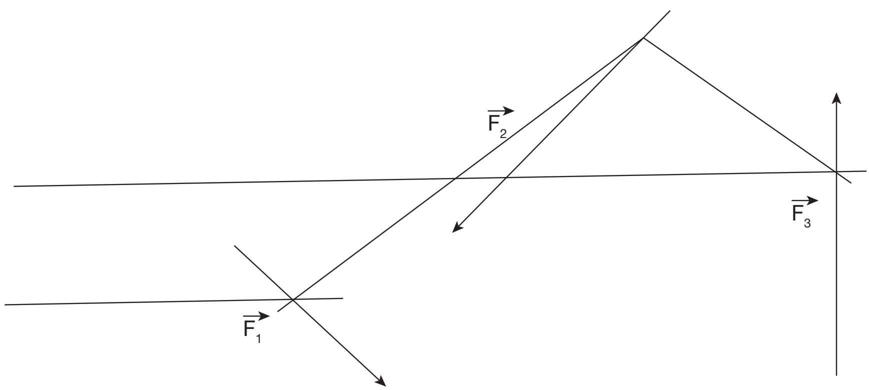

Figure 1.24.

Nous avons donc un système pour lequel la somme des forces est nulle, mais pour lequel le moment résultant n'est pas nul. **Nous avons affaire à un couple**.

Nous pouvons le vérifier rapidement en composant les forces F_1 et F_2. Nous voyons que leur résultante est une force F_4 égale et opposée à F_3.

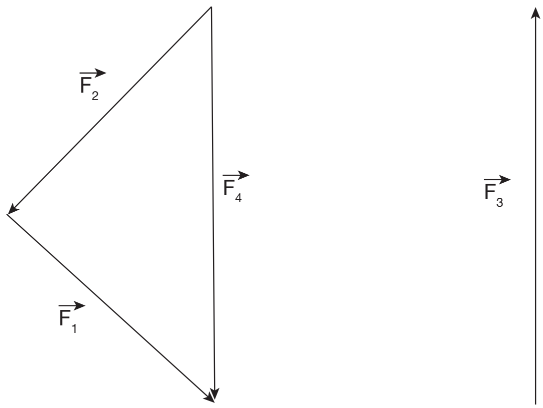

Figure 1.25.

Cas de forces parallèles

La méthode précédente de détermination de la résultante s'applique intégralement, avec une simplification pour le dynamique, car les vecteurs représentant les forces ont même support.

Nous donnerons simplement l'exemple suivant, sans explication supplémentaire.

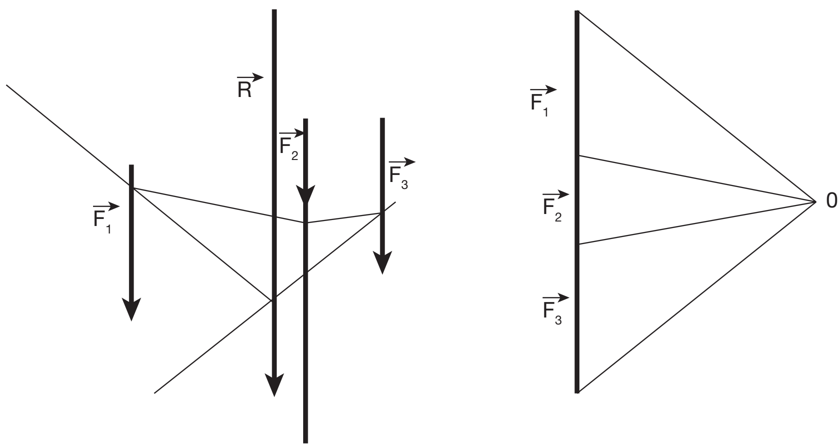

Figure 1.26.

1.5. Exercices

1.5.1. Poutre sur appuis simples : calcul des réactions d'appui

Énoncé

Considérons une poutre AB posée sur deux appuis simples disposés sur une même ligne horizontale. On suppose que cette poutre a un poids négligeable, mais qu'elle est soumise à l'action d'une force concentrée au point C et égale à P newtons (figure 1.13, page suivante).

Calculer les réactions d'appui.

Solution

Nous verrons (paragraphe 4.2.2) que les réactions d'appui sont des forces verticales. Il est alors possible de calculer ces réactions d'appui en appliquant les équations de la statique. Elles sont au nombre de deux, aucune des forces n'ayant de composante dirigée selon l'axe horizontal Ox ; le nombre d'inconnues étant également de deux : les réactions $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$, le système est bien isostatique.

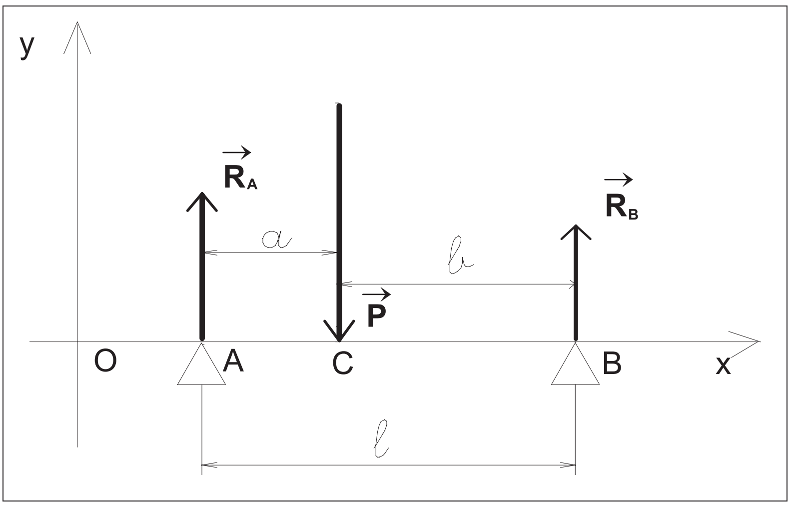

Figure 1.13. *Poutre sur appuis simples.*

Les deux équations d'équilibre s'écrivent :

1. résultante générale nulle :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B - \vec{P} = 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

Dans le cas simple considéré, il est évident, du point de vue physique, que $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ sont dirigées vers le haut, dans la mesure où le poids $\vec{P}$ est dirigé vers le bas, mais nous allons le démontrer.

2. moment résultant nul :

   ce moment peut être déterminé par rapport à tout point du plan. Toutefois, il est astucieux de le choisir par rapport à un point de passage du support d'une réaction à déterminer : le moment par rapport à un point d'une force passant par ce point étant nul, on se libère de cette inconnue.

Calculons, par exemple, le moment par rapport au point B :

Le moment de la réaction $\vec{R}_A$ vaut $R_A \times \ell$.

Le moment du poids $\vec{P}$ est égal à $-P \times b$ (selon la convention de signe précisée ci-dessus).

Le moment de la réaction $\vec{R}_B$ est nul.

On obtient donc l'équation : $R_A \times \ell - P \times b = 0$.

D'où :

$$R_A = \frac{P \times b}{\ell} \tag{1.4}$$

Ce qui nécessite que R_A soit positif, donc la réaction est dirigée vers le haut.

En reportant dans (1.3), on trouve :

$$R_B = \frac{P \times a}{\ell}$$

ce qui donne une valeur positive, comme prévu.

☞ Remarque

Après avoir trouvé la valeur de R_A, il aurait été possible de calculer R_B en déterminant son moment par rapport à A pour obtenir le même résultat. Il est conseillé d'utiliser cette deuxième méthode et de vérifier ensuite que la résultante générale est nulle. En effet, si l'on s'est trompé dans la première équation, donc sur le calcul de la valeur de R_A, on trouvera forcément une valeur fausse de R_B alors que l'on se croira rassuré par la vérification de l'équation (1.3).

1.5.2. Poutre avec double appui simple : calcul des réactions d'appui

Énoncé

Considérons le système ci-après (figure 1.14), dans lequel B est un appui simple (réaction verticale obligatoirement dirigée vers le haut), A est un double appui simple (réaction verticale, mais pouvant être dirigée indifféremment vers le bas ou vers le haut).

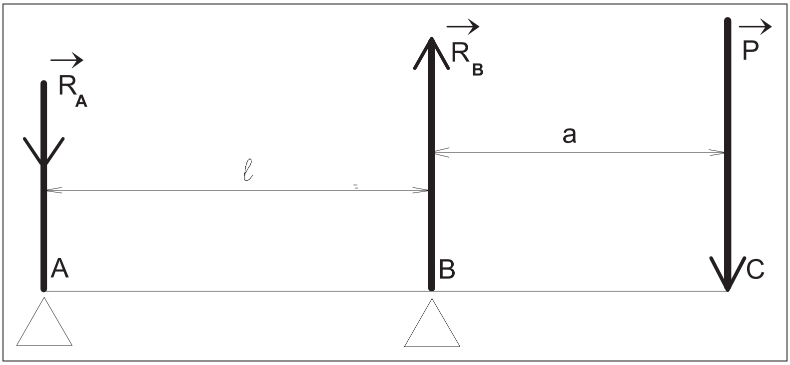

Figure 1.14. *Poutre avec double appui simple*.

Calculer les réactions d'appui R_A et R_B :

1. dans le cas où $P = -1\,000$ N ; $\lambda = 5$ m ; $a = 3$ m
2. dans le cas où $P = -25\,000$ N ; $\lambda = 8$ m ; $a = 4$ m

Solution

1. $P = -1\,000\ N / R_A = -600\ N$; $R_B = +1\,600\ N$
2. $P = -25\,000\ N / R_A = -12\,500\ N$; $R_B = +37\,500\ N$