

ANTÓNIO MANUEL SARMENTO BATISTA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

**O valor do dinheiro
ao longo do tempo**

3ª edição

VidaEconómica



ÍNDICE

Nota de Apresentação.....	25
Prefácio à 3ª Edição.....	29
CAPÍTULO 1 – Introdução.....	33
CAPÍTULO 2 – Capitalização simples	
2.1 Introdução.....	37
2.2 Fórmula geral da capitalização simples.....	37
2.3 Cálculo do capital inicial (C_0).....	39
2.4 Cálculo do juro (J).....	40
2.5 Cálculo do tempo (n).....	41
2.6 Cálculo da taxa de juro (i).....	42
2.7 Cálculo da taxa de juro média em capitalização simples.....	43
2.8 Equivalência de capitais no regime de capitalização simples.....	45
2.9 Fracionamento da taxa de juro.....	48
2.10 Equivalência de taxas em capitalização simples.....	49
2.11 Ano comercial e ano civil.....	51
2.12 Relação entre o juro comercial e o juro civil.....	52
2.13 Juros de vários capitais. Método do divisor fixo.....	54
2.14 Estudo analítico e representação gráfica da função capitalização simples.....	55
Exercícios Capitalização simples.....	57
CAPÍTULO 3 – Desconto simples	
3.1 Introdução.....	79
3.2 Juro simples.....	80
3.3 Desconto por dentro, desconto racional, desconto verdadeiro ou desconto matemático (Regime de juro simples).....	80
3.4 Desconto por fora, desconto comercial ou desconto bancário (Regime de juro simples).....	82
3.5 Comparação entre o desconto por fora e o desconto por dentro.....	85
3.6 Relação entre o desconto por fora e o desconto por dentro.....	86

3.7 Estudo analítico e representação gráfica das funções desconto por fora e desconto por dentro (juro simples)	90
3.8 Equivalência de taxas na negociação de efeitos comerciais.....	93
3.9 Desconto de vários capitais. Método do divisor fixo	95
3.10 Valor nominal do vencimento comum de vários capitais (C_h) e n° de dias de vencimento médio (d).....	98
3.11 Produto líquido na negociação de efeitos comerciais. Desconto de letras	105
Tabela geral do imposto selo (parte).....	107
3.12 Desconto a forfait.....	107
3.13 Cálculo do forfait ideal.....	109
Exercícios Desconto Simples	112
 CAPÍTULO 4 – Capitalização composta	
4.1 Introdução	135
4.2 Fórmula geral da capitalização composta.....	135
4.3 Cálculo do capital inicial (C_0)	138
4.4 Cálculo do tempo (n)	139
4.5 Cálculo da taxa de juro (i)	140
4.6 Cálculo do juro composto (J)	141
4.7 Cálculo da taxa de juro média em capitalização composta.....	142
4.8 Equivalência de capitais em capitalização composta	143
4.9 Capitalização composta para períodos de tempo fracionários.....	147
4.10 Convenção exponencial e linear	149
4.11 Interpolação linear e convenção linear	149
4.12 Estudo analítico e representação gráfica da função de capitalização composta .	151
4.13 Interpolação direta e inversa	153
4.14 Comparação entre capitalização simples e capitalização composta	157
4.15 Fracionamento da taxa de juro.....	158
4.16 Equivalência de taxas em capitalização composta	159
4.17 Taxa equivalente e taxa proporcional. Conclusões	160
4.18 Taxa nominal $r_{(k)}$	161
Exercícios Capitalização Composta.....	168
 CAPÍTULO 5 – Desconto composto	
5.1 Introdução	195
5.2 Desconto por dentro, desconto racional ou desconto matemático (Regime de juro composto).....	196
5.3 Desconto por fora ou desconto comercial (Regime de juro composto).....	197
5.4 Comparação entre o desconto por fora e o desconto por dentro em regime de juro composto	199
5.5 Estudo analítico e representação gráfica comparada das funções de desconto por fora (D_f) e desconto por dentro (D_d).....	201

ÍNDICE

5.5.1 Desconto por fora.....	201
5.5.2 Desconto por dentro	202
5.6 Equivalência entre taxa de juro de negociação (i) e taxa de juro efetiva (i_e).....	204
Exercícios Desconto composto	207
CAPÍTULO 6 – Rendas	
6.1 Conceito de renda	217
6.2 Classificação das rendas	217
6.3 Considerações gerais.....	220
6.4 Rendas constantes	221
6.4.1 Rendas constantes inteiras.....	221
6.4.1.1 Inteiras temporárias	221
6.4.1.1.1 Imediata postecipada.....	221
6.4.1.1.1 A – Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), imediata e postecipada (V_a).....	221
6.4.1.1.1 B – Valor final (ou valor acumulado, ou montante) de uma renda constante, anual (inteira) imediata e postecipada (v_f).....	237
6.4.1.1.2 Imediata antecipada.....	247
6.4.1.1.2 A – Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), imediata e antecipada (V_a).....	247
6.4.1.1.2 B – Valor final de uma renda constante, inteira (anual), imediata e antecipada (v_f).....	251
6.4.1.1.3 Diferida postecipada.....	252
6.4.1.1.3 A - Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), diferida e postecipada (V_a)	253
6.4.1.1.3 B - Valor final de uma renda constante, inteira (anual) diferida e postecipada (v_f)	255
6.4.1.1.4 Diferida antecipada.....	257
6.4.1.1.4 A - Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), diferida e antecipada ($p V_a$).....	257
6.4.1.1.4 B - Valor final de uma renda constante, inteira (anual), diferida e antecipada (v_f).....	258
6.4.1.2. Inteiras perpétuas.....	261
6.4.1.2.1 Imediata postecipada.....	262
6.4.1.2.1 A – Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), perpétua, imediata e postecipada (V_a)	262
6.4.1.2.2 Imediata antecipada.....	263
6.4.1.2.2 A – Valor atual de uma renda constante, anual (inteira), perpétua, imediata, e antecipada (V_a)	263
6.4.1.2.3 Diferida postecipada.....	264
6.4.1.2.3 A – Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), perpétua, diferida e postecipada.....	264

6.4.1.2.4 Diferida antecipada.....	265
6.4.1.2.4 A – Valor atual de uma renda constante, inteira (anual), perpétua, diferida e antecipada.....	265
6.4.2 Rendas constantes fracionadas	266
6.4.2.1 Rendas fracionadas temporárias	266
6.4.2.1.1 Imediata postecipada.....	266
6.4.2.1.1 A ₁ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate e postecipada (V_a) em função da taxa de juro k-esimal i_k	268
6.4.2.1.1 A ₂ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate, e postecipada (V_a) em função da taxa de juro anual i	269
6.4.2.1.1 B ₁ – Valor final de uma renda constante, fracionada, imediata, e postecipada (v_f) em função da taxa de juro k-esimal i_k	272
6.4.2.1.1 B ₂ – Valor final de uma renda constante, fracionada, imediata, e postecipada (v_f) em função da taxa de juro anual i	273
6.4.2.1.2 Imediata antecipada.....	275
6.4.2.1.2 A ₁ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate, e antecipada (V_a) em função da taxa de juro k-esimal i_k	275
6.4.2.1.2 A ₂ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate, e antecipada (V_a) em função da taxa de juro anual i	277
6.4.2.1.2 B ₁ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate e antecipada (v_f) em função da taxa de juro k-esimal i_k	278
6.4.2.1.2 B ₂ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, imediate e antecipada (v_f) em função da taxa de juro anual i	278
6.4.2.1.3 Diferida postecipada.....	281
6.4.2.1.3 A ₁ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida, e postecipada (V_a) em função da taxa de juro k-esimal i_k	281
6.4.2.1.3 A ₂ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida, e postecipada (V_a) em função da taxa de juro anual i	282
6.4.2.1.3 B ₁ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida, e postecipada (v_f) em função da taxa de juro k-esimal i_k	283
6.4.2.1.3 B ₂ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida, e postecipada (v_f) em função da taxa de juro anual i	285
6.4.2.1.4 – Diferida antecipada	287

ÍNDICE

6.4.2.1.4 A ₁ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida e antecipada ($V_{\bar{a}}$) em função da taxa de juro k-esimal i_k	287
6.4.2.1.4 A ₂ – Valor atual de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida e antecipada ($V_{\bar{a}}$) em função da taxa de juro anual i	288
6.4.2.1.4 B ₁ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida e antecipada (v_f) em função da taxa de juro k-esimal i_k	289
6.4.2.1.4 B ₂ – Valor final de uma renda constante, fracionada, temporária, diferida e antecipada (v_f) em função da taxa de juro anual i	290
6.4.2.2 Fracionada perpétua	292
6.4.2.2.1 Imediata postecipada	292
6.4.2.2.1 A ₁ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, imediata e postecipada (V_a) em função da taxa de juro k-esimal i_k	292
6.4.2.2.1 A ₂ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, imediata e postecipada (V_a) em função da taxa de juro anual i	293
6.4.2.2.2 – Imediata antecipada	293
6.4.2.2.2 A ₁ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, imediata e antecipada ($V_{\bar{a}}$) em função da taxa de juro k-esimal i_k	293
6.4.2.2.2 A ₂ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, imediata e antecipada ($V_{\bar{a}}$) em função da taxa de juro anual i	294
6.4.2.2.3 – Diferida postecipada	294
6.4.2.2.3 A ₁ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, diferida e postecipada, em função da taxa de juro k-esimal i_k	294
6.4.2.2.3 A ₂ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, diferida e postecipada, em função da taxa de juro anual i	295
6.4.2.2.4 – Diferida antecipada	295
6.4.2.2.4 A ₁ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, diferida e antecipada, em função da taxa de juro k-esimal i_k	295
6.4.2.2.4 A ₂ – Valor atual da renda constante, fracionada, perpétua, diferida e antecipada, em função da taxa de juro anual i	295
6.4.3. Rendas constantes com periodicidade superior a 1 ano	296
6.4.3.1 Rendas Temporárias	296
6.4.3.1.1 Imediata postecipada	296
6.4.3.1.1 A ₁ – Valor atual da renda constante, temporária, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	297
6.4.3.1.1 A ₂ – Valor atual da renda constante, temporária, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa anual i	298

6.4.3.1.1 B ₁ – Valor final da renda constante, temporária, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	300
6.4.3.1.1 B ₂ – Valor final da renda constante, temporária, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa de juro anual i	300
6.4.3.1.2 – Imediata antecipada.....	301
6.4.3.1.2 A ₁ – Valor atual da renda constante, temporária, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	301
6.4.3.1.2 A ₂ – Valor atual da renda constante, temporária, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa de juro anual i	301
6.4.3.1.2 B ₁ – Valor final da renda constante, temporária, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	302
6.4.3.1.2 B ₂ – Valor final da renda constante, temporária, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa de juro anual i	302
6.4.3.1.3 – Diferida postecipada	303
6.4.3.1.3 A ₁ – Valor atual da renda constante, temporária, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	303
6.4.3.1.3 A ₂ – Valor atual da renda constante, temporária, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa anual i	303
6.4.3.1.3 B ₁ – Valor final da renda constante, temporária, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	304
6.4.3.1.3 B ₂ – Valor final da renda constante, temporária, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa de juro anual i	305
6.4.3.1.4 – Diferida antecipada	305
6.4.3.1.4 A ₁ – Valor atual da renda constante, temporária, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano ($p V_a$) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	305
6.4.3.1.4 A ₂ – Valor atual da renda constante, temporária, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a) em função da taxa de juro anual i	306
6.4.3.1.4 B ₁ – Valor final da renda constante, temporária, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_f) em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	306

ÍNDICE

6.4.3.1.4 B2 – Valor final da renda constante, temporária, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano (v_f) em função da taxa de juro anual i	307
6.4.3.2 Rendas constantes perpétuas com periodicidade superior a 1 ano	308
6.4.3.2.1 – Imediata postecipada	308
6.4.3.2.1 A1 – Valor atual da renda constante, perpétua, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	308
6.4.3.2.1 A2 – Valor atual da renda constante, perpétua, imediata e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa de juro anual i	309
6.4.3.2.2 – Imediata antecipada.....	309
6.4.3.2.2 A1 – Valor atual da renda constante, perpétua, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	309
6.4.3.2.2 A2 – Valor atual da renda constante, perpétua, imediata e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa de juro anual i	310
6.4.3.2.3 – Diferida postecipada.....	311
6.4.3.2.3 A1 – Valor atual da renda constante, perpétua, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	311
6.4.3.2.3 A2 – Valor atual da renda constante, perpétua, diferida e postecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa de juro anual i	311
6.4.3.2.4 – Diferida antecipada.....	312
6.4.3.2.4 A1 – Valor atual da renda constante, perpétua, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	312
6.4.3.2.4 A2 – Valor atual da renda constante, perpétua, diferida e antecipada, com periodicidade superior ao ano (V_a), em função da taxa de juro anual i	312
6.5 Rendas anuais variáveis.....	313
6.5.1 Renda anual variável em progressão aritmética	313
6.5.1.1 Temporária.....	313
6.5.1.1.1 – A Valor atual da renda anual variável em progressão aritmética, imediata e postecipada	314
6.5.1.1.1 – B Valor final da renda anual variável em progressão aritmética, imediata e postecipada	317
6.5.1.1.2 Imediata antecipada.....	319
6.5.1.1.2 – A Valor atual da renda anual variável em progressão aritmética, imediata e antecipada	319

6.5.1.1.2 – B Valor final da renda anual variável em progressão aritmética, imediata e antecipada.....	320
6.5.1.1.3 – Diferida postecipada.....	322
6.5.1.1.3–A Valor atual da renda anual variável em progressão aritmética, diferida e postecipada.....	322
6.5.1.1.3–B Valor final da renda anual variável em progressão aritmética, diferida e postecipada.....	322
6.5.1.1.4–A Valor atual da renda anual variável em progressão aritmética, diferida e antecipada.....	323
6.5.1.1.4–B Valor final da renda anual variável em progressão aritmética, diferida e antecipada.....	324
6.5.1.2 Renda anual perpétua variável em progressão aritmética.....	325
6.5.1.2.1 – Imediata postecipada.....	325
6.5.1.2.1 A - Valor atual da renda perpétua, imediata e postecipada, variável em progressão aritmética.....	325
6.5.1.2.2 – Perpétua Imediata antecipada.....	327
6.5.1.2.2 A - Valor atual da renda perpétua, imediata e antecipada, variável em progressão aritmética.....	327
6.5.1.2.3 Valor atual da renda perpétua, diferida e postecipada, variável em progressão aritmética.....	327
6.5.1.2.4 – Perpétua Diferida antecipada.....	328
6.5.1.2.4 A - Valor atual da renda perpétua, diferida e antecipada, variável em progressão aritmética.....	328
6.5.2 Renda temporária anual variável em progressão geométrica.....	328
6.5.2.1 Temporária.....	328
6.5.2.1.1 – Imediata postecipada.....	328
6.5.2.1.1- A Valor atual da renda anual, imediata e postecipada, variável em progressão geométrica.....	328
6.5.2.1.1-B Valor final da renda anual, imediata e postecipada, variável em progressão geométrica.....	332
6.5.2.1.2 – Imediata antecipada.....	334
6.5.2.1.2 - A Valor atual da renda anual, imediata e antecipada, variável em progressão geométrica.....	334
6.5.2.1.2 – B Valor final da renda anual, imediata e antecipada, variável em progressão geométrica.....	334
6.5.2.1.3 – Diferida postecipada.....	335
6.5.2.1.3 - A Valor atual da renda anual, diferida e postecipada, variável em progressão geométrica.....	335
6.5.2.1.3 – B Valor final da renda anual, diferida e postecipada, variável em progressão geométrica.....	335
6.5.2.1.4 – Diferida antecipada.....	336

ÍNDICE

6.5.2.1.4 - A Valor atual da renda anual, diferida e antecipada, variável em progressão geométrica	336
6.5.2.1.4 – B Valor final da renda anual, diferida e antecipada, variável em progressão geométrica	336
6.5.2.2 Renda perpétua anual variável em progressão geométrica	337
6.5.2.2.1 – Imediata postecipada	337
6.5.2.2.1 A - Valor atual da renda anual, perpétua, imediata e postecipada, variável em progressão geométrica.....	337
6.5.2.2.2 – Imediata antecipada.....	340
6.5.2.2.2 A - Valor atual da renda anual, perpétua, imediata e antecipada, variável em progressão geométrica.....	340
6.5.2.2.3 – Diferida postecipada	341
6.5.2.2.3 A - Valor atual da renda anual, perpétua, diferida e postecipada, variável em progressão geométrica.....	341
6.5.2.2.4 – Diferida antecipada	342
6.5.2.2.4 A - Valor atual da renda anual, perpétua, diferida e antecipada, variável em progressão geométrica.....	342
Exercícios RENDAS.....	352
CAPÍTULO 7 – Amortização de empréstimos	
Introdução	415
7.1 Amortização integral de capital no fim do período	416
7.1.1 Amortização integral de capital e juros no fim do período	416
7.1.2 Amortização integral de capital no fim do período com pagamento periódico de juros	417
7.2 Amortização antecipada do capital e juros, num determinado momento <i>h</i>	420
7.2.1 Amortização antecipada e integral de capital e juros num determinado momento <i>h</i>	420
7.2.1.1 Quando a taxa de juro do mercado é igual ou superior à taxa do empréstimo $i' \geq i$	420
7.2.1.2 Quando a taxa de juro do mercado é inferior à taxa do empréstimo $i' < i$	421
7.2.2 Amortização antecipada e parcial de capital e juros num determinado momento <i>h</i>	422
7.2.2.1 - Quando a taxa de juro do mercado é igual ou superior à taxa do empréstimo $i' \geq i$	422
7.2.2.2 - Quando a taxa de juro do mercado é inferior à taxa do empréstimo, $i' < i$	425
7.3 Amortização antecipada do capital com pagamento periódico de juros.....	428
7.3.1 Amortização total.....	428
7.3.1.1 – Quando a taxa de juro do mercado (i') é igual ou superior à taxa de juro do empréstimo (i).	428

7.3.1.2 - Quando a taxa de juro do mercado (i') é inferior à taxa de juro do empréstimo (i).....	428
7.3.2 Amortização Parcial.....	429
7.3.2.1 - Quando a taxa de juro do mercado (i') é igual ou superior à taxa de juro do empréstimo (i).....	429
7.3.2.2 - Quando a taxa de juro do mercado (i') é inferior à taxa de juro do empréstimo (i).....	430
7.4 - Amortização mediante uma renda.....	435
7.4.1 Sistema francês ou de amortização progressiva.....	436
7.4.1.1 Tabela de amortização de um empréstimo pelo sistema francês.....	437
7.4.1.2 Cálculo da h-ésima linha da tabela de amortização.....	441
7.4.1.3 Amortização de um empréstimo mediante uma renda anual constante diferida “p” anos e postecipada.....	445
7.4.1.4 Amortização de um empréstimo mediante uma renda constante fracionada.....	450
7.4.2 Amortização de empréstimos mediante quotas de amortização constantes.....	452
7.4.2.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização.....	453
7.4.3 Amortização de empréstimos com juros antecipados (Sistema alemão).....	457
7.4.3.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização.....	460
7.4.4 Fundo de amortização (Sistema americano).....	470
7.4.4.1 Cálculo dos elementos da tabela de reconstrução.....	473
7.5 Usufruto de um empréstimo, propriedade plena e nua propriedade.....	478
7.5.1 Algumas definições genéricas.....	478
7.5.2 Reserva matemática, valor de um empréstimo ou plena propriedade.....	479
7.5.3 Sistema Francês.....	482
7.5.3.1- Reserva Matemática (RM_h).....	482
7.5.3.2- Nua Propriedade (NP_h).....	482
7.5.3.3 Usufruto (U_h).....	485
7.5.4 Sistema de Amortizações Constantes.....	487
7.5.4.1 - Reserva Matemática (RM_h).....	487
7.5.4.2- Nua Propriedade (NP_h).....	487
7.5.4.3 - Usufruto (U_h).....	489
7.5.5 Sistema Alemão.....	491
7.5.5.1 Reserva Matemática (RM_h).....	491
7.5.5.2 Nua Propriedade (NP_h).....	491
7.5.5.3 Usufruto (U_h).....	493
Exercícios Amortização de Empréstimos.....	497
CAPÍTULO 8 – Empréstimos por obrigações.....	
Introdução.....	525
8.1 Amortização de um empréstimo obrigacionista mediante uma renda anual constante.....	528

ÍNDICE

8.1.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização de um empréstimo obrigacionista que se amortiza mediante uma renda anual constante	529
8.1.2 Amortização de um empréstimo obrigacionista com prémio de reembolso constante	542
8.1.3 Empréstimo obrigacionista amortizável ao par com prémio e lote anual constante	545
8.1.4 Empréstimo obrigacionista amortizável com prémio de reembolso e lote anual constante	547
8.2 Empréstimo obrigacionista amortizável ao par mediante quotas de amortização constantes	550
Exercícios Empréstimos por Obrigações	554
CAPÍTULO 9 – Taxa de juro efetiva de um empréstimo	
9.1. Introdução	563
9.2 Taxa efetiva de rendimento de um empréstimo	563
9.2.1 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento de juros ao fim de n anos	564
9.2.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital com pagamento periódico de juros	569
9.3 Taxa efetiva do custo de um empréstimo	572
9.3.1 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento de juros no fim de anos n	573
9.3.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital, com pagamento periódico de juros	575
9.4 Cálculo do custo efetivo de empréstimos, nas operações bancárias mais comuns	578
9.4.1 Empréstimo amortizado com reembolso único de capital e pagamento antecipado de juros	578
9.4.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	582
9.4.3 Empréstimo amortizado mediante pagamentos periódicos constantes	585
9.4.4 Empréstimo amortizado mediante quotas de amortização constantes	589
TABELAS	593
ANEXOS	625
BIBLIOGRAFIA	633

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática do fator de capitalização $(1 + ni)$ aplicado ao capital inicial (C_0) , em regime de juro simples	38
Figura 2 – Vários capitais C_0 aplicados a diferentes taxas de juro.....	43
Figura 3 – Vários capitais C_0 aplicados à mesma taxa de juro.....	43
Figura 4 – Atualização dos capitais C_1 e C_2 à taxa de juro anual simples i	45
Figura 5 – No momento n o capital C_1 sendo capitalizado e o capital C_2 sendo atualizado ambos à mesma taxa de juro (i) , se apresentarem valores iguais, dizem-se equivalentes.	46
Figura 6 – No momento n os capitais C_1 e C_2 capitalizados à mesma taxa de juro (i) , se apresentarem valores iguais, dizem-se equivalentes.....	47
Figura 7 – Representação esquemática do fator de capitalização de um capital em regime de juro simples	79
Figura 8 – Representação esquemática do fator de atualização de um capital, em regime de juro simples	80
Figura 9 – Representação esquemática do desconto por dentro (racional) de um capital, em regime de juro simples.....	81
Figura 10 – Representação esquemática do desconto por fora dado pela diferença entre V_n e V_a	84
Figura 11 – Representação esquemática do desconto por fora	84
Figura 12 – Desconto por fora dado pela capitalização do desconto por dentro pelo fator de capitalização simples.	87
Figura 13 – O desconto por dentro é igual ao produto do desconto por fora pelo fator de atualização simples.....	87
Figura 14 – Representação esquemática do efeito da aplicação da taxa de juro efetiva ao valor atual de um efeito comercial.....	93
Figura 15 – Valores nominais de várias letras cujos vencimentos são: d_1, d_2, \dots, d_j respetivamente	98
Figura 16 – Conjunto de vários capitais referentes a várias letras para as quais se pretende substituir por uma única letra	99

Figura 17 – Letra única que substitui o conjunto anterior	99
Figura 18 – Conjunto de vários capitais referentes a várias letras para as quais se pretende substituir por uma única letra	100
Figura 19 – Letra única que substitui o conjunto anterior	101
Figura 20 – Representação esquemática do efeito do fator de capitalização em regime de juro composto.....	136
Figura 21 – Representação esquemática da atualização de um capital C_n através do fator de atualização $(1 + i)^{-n}$	138
Figura 22 – Vários capitais aplicados a diferentes taxas de juro i_h , em regime de juro composto.....	142
Figura 23 – Vários capitais aplicados à mesma taxa de juro i , em regime de juro composto ...	142
Figura 24 – Representação esquemática da equivalência de capitais em dois momentos diferentes, no momento n	144
Figura 25 – Capitais equivalentes no momento n	144
Figura 26 – Capitais equivalentes no momento n	145
Figura 27 – Representação esquemática da capitalização, em regime de juro composto .	195
Figura 28 – Representação esquemática do desconto, em regime de juro composto	196
Figura 29 – Representação esquemática do desconto por dentro ou desconto racional..	197
Figura 30 – Representação esquemática do desconto comercial, em regime de juro composto.....	199
Figura 31 – Representação esquemática da capitalização do valor atual de um efeito comercial.....	204
Figura 32 – Representação esquemática de rendas segundo o vencimento do primeiro pagamento	219
Figura 33 – Representação esquemática do valor atual de uma renda representada pelo somatório de todos os seus termos atualizados no momento zero	220
Figura 34 – Representação esquemática do valor final de uma renda representada pelo somatório de todos os seus termos capitalizados no momento n	220
Figura 35 – Representação esquemática do valor atual (V_a) de um conjunto de capitais que constituem uma renda imediata anual constante e de termos postecipados...	222
Figura 36 – Representação esquemática da transferência simultânea de todos os termos da renda para o momento zero, através do fator $a_{n i}$	224
Figura 37 – Representação esquemática do termo não inteiro α' no momento $n + h$	231
Figura 38 – Representação esquemática da atualização e capitalização de um capital α' no momento $n + h$ em regime de juro simples, para o momento n e para o momento $n + 1$ respetivamente.....	234
Figura 39 – Representação esquemática do valor final (V_f) de um conjunto de capitais que constituem uma renda imediata anual constante e de termos postecipados...	237
Figura 40 – Representação esquemática da transferência simultânea de todos os termos da renda para o momento n , através do fator de capitalização $S_{n i}$	239

ÍNDICE FIGURAS

Figura 41 – Fator de capitalização de uma renda à taxa de juro composto i pelo tempo n , obtendo-se o fator de capitalização S_{ni}	246
Figura 42 – Fator de atualização de uma renda à taxa de juro composto i pelo tempo n , obtendo-se o fator atualização a_{ni}	246
Figura 43 – Diagrama cronológico de um conjunto de n capitais, cujo primeiro vencimento tem lugar no momento zero	247
Figura 44 – Representação esquemática da transferência dos termos de uma renda constante, inteira imediata de n termos antecipados para o momento zero	248
Figura 45 – Representação esquemática da renda diferida postecipada	253
Figura 46 – Representação esquemática do valor da renda no momento “ p ”	253
Figura 47 – Representação esquemática da transferência do valor da renda do momento “ p ” para o momento zero. Convencionou-se utilizar para as rendas diferidas o símbolo « $p $ » que antecede o símbolo do valor atual ($p V_a$)	254
Figura 48 – Representação esquemática de uma renda diferida com termos antecipados, com diferimento de p períodos	257
Figura 49 – Representação esquemática do valor final de uma renda diferida, com termos antecipados	258
Figura 50 – Representação esquemática de uma renda perpétua de termos antecipados	263
Figura 51 – Renda diferida postecipada de termos infinitos	264
Figura 52 – Renda diferida antecipada de termos infinitos	265
Figura 53 – Renda fracionada temporária imediata e postecipada	266
Figura 54 – Renda fracionada temporária imediata e antecipada	275
Figura 55 – Ilustração do valor atual da renda antecipada se lhe tivesse sido aplicado $V_a = \alpha \cdot a_{nk i_k}$	275
Figura 56 – Ilustração da capitalização de V_{-1} para o momento zero	276
Figura 57 – Representação esquemática de uma renda fracionada diferida postecipada..	281
Figura 58 – Representação esquemática de uma renda fracionada diferida postecipada, em função da taxa de juro anual i	282
Figura 59 – Representação esquemática de uma renda fracionada diferida antecipada....	287
Figura 60 – Representação esquemática da renda constante com periodicidade superior ao ano ($h>1$)	296
Figura 61 – Representação esquemática de uma renda em progressão aritmética de razão p	312
Figura 62 – Decomposição de uma renda de em progressão aritmética de razão p	314
Figura 63 – Diagrama cronológico de uma renda anual perpétua variável em progressão aritmética	325
Figura 64 – Diagrama cronológico de uma renda anual variável em progressão geométrica..	329
Figura 65 – Cancelamento antecipado total [$(i)' < (i)$] de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	429
Figura 66 – Amortização antecipada para [$(i)' < (i)$] de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	430

Figura 67 – O valor de P_h capitalizado à taxa de juro de mercado i' por $(n - h)$ períodos....	431
Figura 68 – Os juros anuais e que agora serão $S_h \cdot i$ valorizados ao momento n à taxa de juro do mercado i'	431
Figura 69 – O saldo S_h que fica pendente de amortização.....	431
Figura 70 – Amortização de um empréstimo mediante uma renda, cujos termos são iguais ..	437
Figura 71 – Representação esquemática da amortização progressiva de um empréstimo pelo sistema francês: $\alpha_1 = C_1 + J_1$: $\alpha_2 = C_2 + J_2$: $\alpha_m = C_m + J_m$; $\alpha_n = C_n + J_n$	437
Figura 72 – Representação esquemática da amortização de um empréstimo, mediante uma renda anual constante diferida p anos e postecipada, em que durante os anos de diferimento pagam-se apenas os juros.	446
Figura 73 – Amortização de um empréstimo mediante uma renda anual constante diferida p anos e postecipada em que durante os anos que perdura o diferimento não se pagam juros	446
Figura 74 – Amortização de um empréstimo mediante uma renda constante fracionada	450
Figura 75 – Atualização de uma renda de termos <i>k-esimais</i>	450
Figura 76 – Representação esquemática da amortização mediante quotas de amortização constantes	453
Figura 77 – Representação esquemática de amortização de empréstimos com juros antecipados (Sistema alemão)	458
Figura 78 – Valor no momento h de todas as quotas de reconstrução destinadas ao fundo e valoradas à taxa de juro (i')	474
Figura 79 – Representação esquemática de plena propriedade e, nua propriedade e usufruto	479
Figura 80 – Representação esquemática do valor de um empréstimo, no momento h	480
Figura 81 – Representação esquemática de um empréstimo amortizável por quotas constantes	488
Figura 82 – Representação cronológica da determinação da nua-propriedade de um empréstimo amortizável por quotas constantes.....	489
Figura 83 – Representação cronológica do cálculo da nua propriedade pelo sistema alemão.....	492

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Representação gráfica da função monótona crescente, ilustrativa da capitalização, em regime de juro simples.....	56
Gráfico 2 – O desconto por dentro D_d por muito grande que seja n nunca atingirá o valor nominal, o que prova a racionalidade deste desconto.....	92
Gráfico 3 – Representação gráfica da função de capitalização composta.....	137
Gráfico 4 – Função $(1 + i)^n$	152
Gráfico 5 – Representação gráfica conjunta da capitalização simples e composta	158
Gráfico 6 – Representação gráfica das funções do D_f e do D_d em regime de juro composto.....	203

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Períodos de tempo e respetivos <i>k-esimos</i>	50
Tabela 2 – Ilustração do cálculo de juro simples utilizando o divisor fixo (<i>D</i>) e Números	55
Tabela 3 – Ilustração do cálculo do desconto por fora utilizando o divisor fixo (<i>D</i>) e Números (<i>N_n</i>).....	97
Tabela 4 – Dedução da fórmula de capitalização composta $C_n = C_0(1 + i)^n$	135
Tabela 5 – Comparação entre capitalização simples e capitalização composta.....	157
Tabela 6 – Fracionamento da taxa de juro	158
Tabela 7 – Dedução da expressão analítica do valor atual ou valor efetivo de um efeito comercial	198
Tabela 8 – Classificação das rendas.....	217
Tabela 9 – Soma dos termos da progressão geométrica decrescente	223
Tabela 10 – Soma dos termos da progressão geométrica crescente	238
Tabela 11 – Fórmula resolvente da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente	459

NOTA DE APRESENTAÇÃO

O conteúdo deste livro versa sobre noções elementares de Matemática Financeira nas suas vertentes teórica e prática. Apresenta-se como um manual de estudo e de suporte para aplicações profissionais, nomeadamente em aspetos relacionados com a prática bancária e seguradora.

A nível académico, destina-se aos estudantes dos cursos de gestão empresarial, gestão bancária e seguradora, contabilidade e auditoria, economia e de métodos quantitativos de análise e gestão financeira.

Este livro resultou do meu trabalho de docente, que teve como suporte um conjunto alargado de fontes bibliográficas que versam esta temática, e do inestimável contributo dos meus alunos. Estes, através de questões e dúvidas sobre o desenvolvimento de certas matérias, ensinaram-me a expor os mesmos temas através de abordagens mais simples e compreensíveis, sem abandonar o rigor técnico e científico dos seus conteúdos.

Uma das dificuldades mais evidenciadas, atualmente, pelos estudantes incide sobre o desenvolvimento matemático e das suas transições no prosseguimento do método dedutivo, que me conduziu a apresentar todas as passagens, mesmo aquelas que pareçam demasiado evidentes, que por certo serão para alguns, mas não serão para todos.

Com a publicação do Decreto-Lei 64/2006, de 21 de março, que regula o acesso ao ensino superior por maiores de 23 anos, novos desafios foram colocados aos professores no ensino ministrado a estudantes, os quais já não têm muito presentes estas matérias. Esta constatação tem constituído algumas barreiras à aprendizagem e assimilação das noções básicas da matemática, dentro dos calendários dos períodos letivos, destinados à unidade curricular de Cálculo Financeiro.

Este livro tenta mitigar algumas dessas dificuldades, apresentando através de figuras, gráficos e tabelas os suportes das explicações teóricas que lhes permitem uma aprendizagem mais célere.

Como ponto de partida, apresenta-se o alcance que exprime a razão de ser desta temática, ou seja, o valor do dinheiro ao longo do tempo e das variáveis que lhe estão associadas.

O **Capítulo I** trata a utilização do capital por terceiros, através de operações de empréstimo, ou pela aplicação desse capital em investimentos, e terá sempre como objetivo uma recompensa. A quantia que recompensa a aplicação ou a utilização do capital por terceiros designa-se por juro. Este, produzido pela aplicação de certas regras financeiras, gerará um novo capital e cujo processo se designa por capitalização.

O **Capítulo II** trata a *capitalização simples*, deduzindo-se a sua fórmula geral e através dela a possibilidade de cálculo do capital inicial, do juro, do tempo e da taxa de juro.

O **Capítulo III** versa sobre o conceito oposto ao da capitalização ou *desconto*, matéria muito utilizada nas práticas bancárias no desconto de letras. Aqui introduzem-se os conceitos de desconto por fora, desconto bancário ou desconto comercial e o desconto por dentro, ou desconto racional.

O **Capítulo IV** regressa à capitalização, mas desta vez à *capitalização composta*, caracterizada por acumular ao capital principal os juros, produzindo juros cada vez maiores, nos sucessivos períodos de tempo.

O **Capítulo V** introduz o *desconto composto*, que, sendo o oposto à capitalização composta, traduz a transferência de um capital de um momento a outro anterior, utilizando a taxa de juro composto, no seu processo de atualização desse capital.

O **Capítulo VI** estuda as *rendas* que constituem um conjunto de capitais financeiros cujos vencimentos são equidistantes, isto é, que se vencem com a mesma periodicidade. Aqui, classificam-se as rendas segundo a sua natureza, periodicidade, vencimento do primeiro pagamento, número de termos e ainda segundo o seu regime de capitalização. Neste capítulo, utilizam-se certos símbolos próprios de notação da matemática financeira e cuja finalidade é a de abreviar e resumir uma série de cálculos financeiros que estão já traduzidos em tabelas financeiras, evitando um conjunto de cálculos necessários à sua determinação. São exemplos desta notação os símbolos s e a , entre outros, e cuja explicação será encontrada no desenvolvimento deste capítulo.

O **Capítulo VII** trata a *amortização de empréstimos*, quer por reembolso único, quer por reembolso parcial do capital emprestado, e as equivalências nos resultados finais, derivadas do momento em que se introduzem alterações de amortização antecipada nos contratos inicialmente acordados entre o mutuante e o mutuário. Estas negocia-

ções apelam ao interesse do mutuante em aceitar ou não as propostas do mutuário, atendendo às taxas de juro que vigoram no momento no mercado, face àquela que foi acordada no momento do empréstimo. São também tratadas as amortizações de empréstimos mediante rendas, utilizando vários sistemas, nomeadamente o francês, o de amortizações constantes, o alemão e o americano.

O **Capítulo VIII** aborda os empréstimos por obrigações ou *empréstimos obrigacionistas*. As obrigações como títulos de crédito podem ser emitidas quer por empresas quer pelo Estado, sendo que, quando emitidas por este, são designadas por obrigações do tesouro (OT) e bilhetes de tesouro. Os procedimentos que se utilizam mais frequentemente na amortização de empréstimos obrigacionistas são, nomeadamente, a amortização mediante uma renda anual constante e a amortização mediante quotas anuais constantes. Para uma melhor compreensão das transferências de capital entre os diversos momentos em que decorre o empréstimo, são utilizadas diversas representações esquemáticas dos respetivos processos.

O **Capítulo IX** incide sobre o cálculo da taxa anual efetiva (TAE) quer do rendimento da aplicação do capital, através do empréstimo, quer do custo efetivo desse empréstimo, ou seja, depois de suportados encargos, comissões bancárias e outros custos inerentes aos processos de concessão de crédito.

Em **Anexos** apresentam-se tabelas financeiras mais frequentemente utilizadas no cálculo financeiro.

António Manuel Sarmento Batista

PREFÁCIO À 3^A EDIÇÃO

Esta nova edição apresenta mais exercícios resolvidos que a edição anterior. Muitos desses exercícios foram sugeridos pelos próprios estudantes, que procuraram esgotar todas as hipóteses possíveis de apresentação de um caso prático. Neste sentido, incluíram-se diferentes perspectivas de apresentação nos enunciados dos exercícios e as diferentes alternativas que podem ser utilizadas na resolução dos mesmos.

Reconhecendo que a maior dificuldade na resolução dos casos, não reside no próprio exercício, mas no obstáculo da sua interpretação, mantivemos como método de trabalho, a identificação dos *dados* que são apresentados, as *incógnitas* que devem ser descobertas, a seleção da(s) *fórmula(s)* apropriadas e a sequência do *método resolutivo*.

Os formulários foram aumentados, muitas vezes incluindo a mesma fórmula com notações diferentes, que por demais evidentes e desnecessárias, mesmo assim, são “apreciadas” pelos alunos.

Sabendo que este livro é maioritariamente utilizado por estudantes, que sujeitos a provas de avaliação nas provas intercalares e de conhecimento nos exames finais, o tempo de execução e a sua adequabilidade ao tempo das provas, conduz os docentes a ponderar o tempo que um aluno demora na resolução dos mesmos e o número de questões que podem ser incluídas, naquelas provas. O sistema de avaliação, no ensino superior, impõe regras que, não sendo novas, exigem aos alunos a prova de conhecimento num período de tempo certo, transformando os exames, não só em provas de conhecimento, mas também em provas de contrarrelógio. Declinámos a solicitação de incluir em cada exercício o tempo médio de resolução, deixando ao docente e ao discente fazer essa ponderação, dado o risco de subjetividade e de desmotivação, que uma aferição deste tipo, poderia causar.

Agradecemos as opiniões e sugestões de professores e de estudantes, que em muito têm contribuído para uma continuada melhoria do conteúdo e revisão do texto.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As instituições financeiras e as empresas (não financeiras) têm que, diariamente, tomar múltiplas decisões, nomeadamente, decisões de concessão de crédito e de investimento. Estas decisões visam a obtenção de um benefício, num determinado período de tempo.

Naturalmente, que esse benefício será o *lucro*, ou seja, um determinado capital que ficará sujeito a destinos diversos, designadamente à satisfação de compromissos com os fornecedores, ao cumprimento de obrigações fiscais, pagamento de salários e outras obrigações, por um lado, e por outro lado, a aplicações alternativas, tais como: à distribuição pelos acionistas/sócios; ao empréstimo a terceiros; e ao investimento.

Se aquele capital for *distribuído* pelos acionistas/sócios significa que se estará a recompensar aqueles que investiram no negócio, remunerando a aplicação dos respetivos capitais investidos.

Se o mesmo capital for *emprestado*, significa que se estará a ceder temporariamente a sua disponibilidade a terceiros, esperando-se receber no futuro o capital emprestado mais uma determinada quantia. Esta quantia é destinada a minorar os efeitos da erosão que o dinheiro sofreu durante o período do empréstimo, bem como recompensar a indisponibilidade da sua utilização e a remunerar o risco de incumprimento do devedor.

Se o capital for *investido*, significa que se estará a sacrificar a disponibilidade presente desse valor, esperando-se que os resultados obtidos tragam no futuro a recompensa esperada daquela decisão.

A quantia que recompensa a aplicação ou a utilização do capital por terceiros designa-se por *juro*. A pessoa ou empresa que empresta dinheiro a juros designa-se por prestamista¹.

1. Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Lello Editores

O *juro* estará assim dependente do *capital* emprestado ou investido, do *tempo* que durar o empréstimo ou a amortização do investimento e da *taxa de juro* que for fixada na operação financeira.

Entende-se por *operação financeira* toda a ação destinada a substituir um capital ou vários, por outros, em diferentes momentos, aplicando-se-lhe uma determinada regra financeira, num determinado momento de referência.

O juro produzido pela aplicação dessa regra financeira será adicionado ao capital inicial, resultando um novo capital que se designará por *capital final*, *montante* ou *capital futuro*.

Ao processo que permite determinar o capital final designa-se por *capitalização*.

A capitalização apresenta dois regimes diferentes: a *capitalização simples* e a *capitalização composta*, que serão desenvolvidos nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 2

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

2.1 Introdução

O regime de capitalização simples caracteriza-se por não ser acumulável o juro produzido, em cada período, com o capital principal.

O juro produzido em qualquer período será o resultado do produto do *capital inicial* por uma *taxa de juro*. No fim de cada período, o juro produzido será entregue ao *mutuante*² (quem emprestou), mantendo-se o *mutuário*³ (quem pediu emprestado) devedor do capital que lhe foi emprestado inicialmente.

Representando-se por:

J_h – Juro no período h ; C_0 – Capital inicial (momento zero); i – taxa de juro :

Juro no primeiro ano	$J_1 = C_0 \cdot i$
Juro no segundo ano	$J_2 = C_0 \cdot i$
Juro no terceiro ano	$J_3 = C_0 \cdot i$
...	...
Juro no ano $(n - 1)$	$J_{(n-1)} = C_0 \cdot i$
Juro no ano n	$J_n = C_0 \cdot i$

1

$J = C_0 \cdot i$	Juro simples para 1 período de capitalização
-------------------	--

2.2 Fórmula geral da capitalização simples

Para deduzir a fórmula geral de capitalização simples bastará somar ao capital inicial (C_0) o juro (J_h) produzido nos respetivos períodos (h). Admitindo-se que cada período representaria um ano, no final de cada ano o montante obtido (C_h) será o resultado da adição ao capital inicial (C_0) o juro correspondente aos h períodos.

2. Pessoa que mutua ou dá por empréstimo.

3. Pessoa que recebe alguma coisa por empréstimo.

Assim, no final do ano n , o montante (C_n) será:

No fim do ano 1	$C_1 = C_0 + J_1$	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i$	$C_1 = C_0(1 + i)$
No fim do ano 2	$C_2 = C_0 + J_1 + J_2$	$C_2 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i$	$C_2 = C_0(1 + 2i)$
No fim do ano 3	$C_3 = C_0 + J_1 + J_2 + J_3$	$C_3 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i$	$C_3 = C_0(1 + 3i)$
...
No fim do ano n	$C_n = C_0 + J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n$	$C_n = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i$	$C_n = C_0(1 + ni)$

Poder-se-á, deste modo, concluir que se o investimento ou empréstimo durar n anos, o capital final (C_n) ou montante obtido será:

2	$C_n = C_0(1 + ni)$	<i>Capital final em regime de juro simples</i>
----------	---------------------	--

A fórmula geral de capitalização simples indica que o capital final (C_n) foi obtido ao investir um capital inicial (C_0) a uma taxa de juro i , durante n períodos.

Se admitirmos que o capital investido (C_0) é igual à unidade ($C_0 = 1$) resultará:

$$C_n = 1(1 + ni) = 1 + ni$$

Portanto $1 + ni$ será o valor final que se obterá ao investir uma unidade monetária à taxa de *juro anual simples* i durante n anos.

Representando esquematicamente:

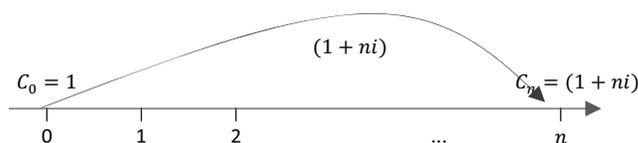


Figura 1 – Representação esquemática do fator de capitalização $(1 + ni)$ aplicado ao capital inicial (C_0), em regime de juro simples.

Considerar-se-á a partir de agora que $(1 + ni)$ é o *fator de capitalização* em regime de *juro simples*. Este fator serve para transferir capitais de um dado momento para um outro posterior.

Exemplo 1

Calcular o capital final que se obtém ao investir 8 000 € à taxa de *juro anual simples* de 5% durante 4 anos.

Capitalização simples

Exercício 1

Calcular o juro total que produziram os capitais abaixo indicados, durante o tempo que se indica, sabendo que todos eles foram colocados à taxa de juro anual simples de 9%.

Dados	Incógnita	Fórmula	Resolução
$C_1 = 5\,000\text{ €}; n_1 = 1\text{ ano e }1\text{ mês}$	$J_{Tot.}$	$J = C_0 \cdot n \cdot i$	$J_1 = 5\,000 \times \frac{13}{12} \times 0,09 = 487,50\text{ €}$
$C_2 = 10\,000\text{ €}; n_2 = 3\text{ meses e }10\text{ dias}$			$J_2 = 10\,000 \times \frac{100}{360} \times 0,09 = 250\text{ €}$
$C_3 = 20\,000\text{ €}; n_3 = 2\text{ trimestres e }2\text{ meses}$			$J_3 = 20\,000 \times \frac{8}{12} \times 0,09 = 1\,200\text{ €}$
$C_4 = 40\,000\text{ €}; n_4 = 1\text{ quadrim, }1\text{ trim. e }5\text{ dias}$			$J_4 = 40\,000 \times \frac{215}{360} \times 0,09 = 2\,150\text{ €}$
$i = 0,09$			$\sum_{j=1}^{j=4} = 4\,087,50\text{ €}$

Resposta 1
4 087,50 €

Exercício 2

Determinar a taxa trimestral a que se investiu um capital durante 15 quadrimestres, sabendo que produziu um juro igual à sua quarta parte.

Dados	Incógnita	Fórmula	Resolução
Capital = A	i_4	$J = C_0 \cdot n \cdot i$	$\frac{A}{4} = A \times 20\text{ trimestres} \times i_4$
$n = 15\text{ quadrimestres} = 60\text{ meses} = 20\text{ trimestres}$			$\frac{1}{4} = 20 \times i_4$
$J = \frac{A}{4}$			$i_4 = \frac{1}{80} = 0,0125 \cong 1,25\%$

Resposta 2
1,25%

Exercício 3

De dois capitais sabe-se que o segundo excede o primeiro na sua metade, os quais se investiram do seguinte modo:

- O primeiro à taxa de juro anual simples de 6%, durante 3 anos;
- O segundo à taxa de juro anual simples de 7%, durante 2 anos. Sabe-se que os juros do segundo capital excedem os do primeiro em 600 €.

Qual é a quantia dos capitais e a dos juros?

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dados	Incógnita	Fórmula	Resolução
Primeiro capital = A	A	$J = C_0 \cdot n \cdot i$	$0,14 B = J_A + 600$
Segundo capital = B	B		$0,14 \left(A + \frac{A}{2} \right) = 0,18 A + 600$
$B = A + \frac{A}{2}$	J_A		$0,21 A - 0,18 A = 600$
$J_A = A \times 3 \times 0,06 = 0,18 A$	J_B		$A = \frac{600}{0,03} = 20\,000 \text{ €}$
$J_B = B \times 2 \times 0,07 = 0,14 B$			$B = A + \frac{A}{2} = 20\,000 + 10\,000 = 30\,000 \text{ €}$
			$J_A = 0,18 A$ $J_A = 0,18 \times 20\,000 = 3\,600 \text{ €}$
$J_B = J_A + 600 \text{ €}$			$J_B = J_A + 600$
			$J_B = 3\,600 + 600 = 4\,200 \text{ €}$

Resposta 3

$A = 20\,000 \text{ €}; B = 30\,000 \text{ €};$

$J_A = 3\,600 \text{ €}; J_B = 4\,200 \text{ €}$

Exercício 4

A que taxa quadrimestral se emprestou um capital durante 1 ano e 7 meses, sabendo que produziu nesse tempo, um juro igual à sua quinta parte.

Dados	Incógnita	Fórmula	Resolução
$n = 1 \text{ ano e } 7 \text{ meses} = 19 \text{ meses}$	i_3	$J = C_0 \cdot n \cdot i$	$\frac{A}{5} = A \times \frac{19}{12} \times i$
$J = \frac{A}{5}$		$i_k = \frac{i}{k}$	$i = \frac{12}{95} = 0,12631579$
$k = 3$			$i_3 = \frac{0,12631579}{3} = 0,04210526 \cong 4,21\%$

Resposta 4

4,21%

Exercício 5

Determinar a quantia que se investiu à taxa bimestral simples de 3%, durante 7 meses, sabendo que produziu um juro superior em € 7 000, do que tinha produzido quando colocado à taxa trimestral simples de 3%, durante o mesmo tempo.

Dados	Incógnita	Fórmula	Resolução
$k = 6; i_6 = 0,03; n = 7 \text{ meses}$	C_0	$J = C_0 \cdot n \cdot k \cdot i_k$	$0,105 C_0 = 0,07 C_0 + 7\,000$
$k = 4; i_4 = 0,03; n = 7 \text{ meses}$			$0,035 C_0 = 7\,000$
$J_A = J_B + 7\,000 \text{ €}$			$C_0 = \frac{7\,000}{0,035} = 200\,000 \text{ €}$
$J_A = C_0 \times \frac{7}{12} \times 6 \times 0,03$			
$J_B = C_0 \times \frac{7}{12} \times 4 \times 0,03$			
$C_0 \times \frac{7}{12} \times 6 \times 0,03 = C_0 \times \frac{7}{12} \times 4 \times 0,03 + 7000$			
Desenvolvimento dos cálculos na Resolução			

Resposta 5

200 000 €

TABELAS

Tabela de contagem de número de dias (Ano Civil)

Dias do mês	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Exemplo para utilização da tabela:

Quantos dias decorreram de 1 fevereiro a 15 de maio do mesmo ano?

- O dia 1 de fevereiro corresponde ao número 32
- O dia 15 de maio corresponde ao nº 135;
- O número de dias entre as datas será dado pela diferença entre os dois números:
 $(135 - 32) = 103$
- O número de dias corridos entre as datas é igual a 103.

Tabela: $(1 + i)^n$

Valor final de uma unidade monetária colocada a juro composto

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1,01000000	1,02000000	1,03000000	1,04000000	1,05000000	1,06000000	1,07000000	1,08000000	1,09000000
2	1,02010000	1,04040000	1,06090000	1,08160000	1,10250000	1,12360000	1,14490000	1,16640000	1,18810000
3	1,03030100	1,06120800	1,09272700	1,12486400	1,15762500	1,19101600	1,22504300	1,25971200	1,29502900
4	1,04060401	1,08243216	1,12550881	1,16985856	1,21550625	1,26247696	1,31079601	1,36048896	1,41158161
5	1,05101005	1,10408080	1,15927407	1,21665290	1,27628156	1,33822558	1,40255173	1,46932808	1,53862395
6	1,06152015	1,12616242	1,19405230	1,26531902	1,34009564	1,41851911	1,50073035	1,58687432	1,67710011
7	1,07213535	1,14868567	1,22987387	1,31593178	1,40710042	1,50363026	1,60578148	1,71382427	1,82803912
8	1,08285671	1,17165938	1,26677008	1,36856905	1,47745544	1,59384807	1,71818618	1,85093021	1,99256264
9	1,09368527	1,19509257	1,30477318	1,42331181	1,55132822	1,68947896	1,83845921	1,99900463	2,17189328
10	1,10462213	1,21899442	1,34391638	1,48024428	1,62889463	1,79084770	1,96715136	2,15892500	2,36736367
11	1,11566835	1,24337431	1,38423387	1,53945406	1,71033936	1,89829856	2,10485195	2,33163900	2,58042641
12	1,12682503	1,26824179	1,42576089	1,60103222	1,79585633	2,01219647	2,25219159	2,51817012	2,81266478
13	1,13809328	1,29360663	1,46853371	1,66507351	1,88564914	2,13292826	2,40984500	2,71962373	3,06580461
14	1,14947421	1,31947876	1,51258972	1,73167645	1,97993160	2,26090396	2,57853415	2,93719362	3,34172703
15	1,16096896	1,34586834	1,55796742	1,80094351	2,07892818	2,39655819	2,75903154	3,17216911	3,64248246
16	1,17257864	1,37278571	1,60470644	1,87298125	2,18287459	2,54035168	2,95216375	3,42594264	3,97030588
17	1,18430443	1,40024142	1,65284763	1,94790050	2,29201832	2,69277279	3,15881521	3,70001805	4,32763341
18	1,19614748	1,42824625	1,70243306	2,02581652	2,40661923	2,85433915	3,37993228	3,99601950	4,71712042
19	1,20810895	1,45681117	1,75350605	2,10684918	2,52695020	3,02559950	3,61652754	4,31570106	5,14166125
20	1,22019004	1,48594740	1,80611123	2,19112314	2,65329771	3,20713547	3,86968446	4,66095714	5,60441077
21	1,23239194	1,51566634	1,86029457	2,27876807	2,78596259	3,39956360	4,14056237	5,03383372	6,10880774
22	1,24471586	1,54597967	1,91610341	2,36991879	2,92526072	3,60353742	4,43040174	5,43654041	6,65860043
23	1,25716302	1,57689926	1,97358651	2,46471554	3,07152376	3,81974966	4,74052986	5,87146365	7,25787447
24	1,26973465	1,60843725	2,03279411	2,56330416	3,22509994	4,04893464	5,07236695	6,34118074	7,91108317
25	1,28243200	1,64060599	2,09377793	2,66583633	3,38635494	4,29187072	5,42743264	6,84847520	8,62308066

ANEXOS

TABELA GERAL DO IMPOSTO SELO (OPERAÇÕES FINANCEIRAS)

(...)

17 Operações financeiras:

17.1 - Pela utilização de crédito, sob a forma de fundos, mercadorias e outros valores, em virtude da concessão de crédito a qualquer título exceto nos casos referidos na verba 17.2, incluindo a cessão de créditos, o factoring e as operações de tesouraria quando envolvam qualquer tipo de financiamento ao cessionário, aderente ou devedor, considerando-se, sempre, como nova concessão de crédito a prorrogação do prazo do contrato - sobre o respetivo valor, em função do prazo: *(Redação dada pela Lei n.º 12-A/2010, de 30/06)*

17.1.1 Crédito de prazo inferior a um ano - por cada mês ou fração 0,04%

17.1.2 Crédito de prazo igual ou superior a um ano 0,50%

17.1.3 Crédito de prazo igual ou superior a cinco anos 0,60%

17.1.4 Crédito utilizado sob a forma de conta corrente, descoberto bancário ou qualquer outra forma em que o prazo de utilização não seja determinado ou determinável, sobre a média mensal obtida através da soma dos saldos em dívida apurados diariamente, durante o mês, divididos por 30 0,04%

17.2 - Pela utilização de crédito em virtude da concessão de crédito no âmbito de contratos de crédito a consumidores abrangidos pelo Decreto-Lei n.º 133/2009, de 2 de junho, considerando-se, sempre, como nova concessão de crédito a prorrogação do prazo do contrato - sobre o respetivo valor, em função do prazo: *(Redação dada pela Lei n.º 12-A/2010, de 30/06)*

17.2.1 - Crédito de prazo inferior a um ano - por cada mês ou fração - 0,07 %.
(Redação dada pela Lei n.º 12-A/2010, de 30/06)

(...)

Artigo 5.º

Rendimentos da categoria E

1 - Consideram-se rendimentos de capitais os frutos e demais vantagens económicas, qualquer que seja a sua natureza ou denominação, sejam pecuniários ou em espécie, procedentes, directa ou indirectamente, de elementos patrimoniais, bens, direitos ou situações jurídicas, de natureza mobiliária, bem como da respectiva modificação, transmissão ou cessação, com excepção dos ganhos e outros rendimentos tributados noutras categorias.

2 - Os frutos e vantagens económicas referidos no número anterior compreendem, designadamente:

- a) Os juros e outras formas de remuneração decorrentes de contratos de mútuo, abertura de crédito, reporte e outros que proporcionem, a título oneroso, a disponibilidade temporária de dinheiro ou outras coisas fungíveis;
- b) Os juros e outras formas de remuneração derivadas de depósitos à ordem ou a prazo em instituições financeiras, bem como de certificados de depósitos;
- c) Os juros, os prémios de amortização ou de reembolso e as outras formas de remuneração de títulos da dívida pública, obrigações, títulos de participação, certificados de consignação, obrigações de caixa ou outros títulos análogos, emitidos por entidades públicas ou privadas, e demais instrumentos de aplicação financeira, designadamente letras, livranças e outros títulos de crédito negociáveis, enquanto utilizados como tais;
- d) Os juros e outras formas de remuneração de suprimentos, abonos ou adiantamentos de capital feitos pelos sócios à sociedade;

BIBLIOGRAFIA

- Ayres, F., Matemática Financeira, McGraw-Hill
- Cadilhe, M., Matemática Financeira Aplicada, Edições ASA
- Costa, M., Cálculo Financeiro, Plátano Editora
- Fernandes, L., Noções Fundamentais de Cálculo Financeiro, INCM
- Lisboa, J. et al., Cálculo Financeiro, Vida Económica
- Mateus, A., Cálculo Financeiro, Edições Sílabo
- Matias, R., Cálculo Financeiro, Escolar Editora
- Olavo, F., Desconto Bancário, Anuário Com. Português
- Rodrigues, A. et al., Elementos de Cálculo Financeiro, Rei dos Livros
- Samanez, C., Matemática Financeira - Aplicações à Análise de Investimentos
- Silva, A., Matemática das Finanças, Editora McGraw-Hill
- Sobrinho, J., Matemática Financeira, Editora Atlas
- Vieira, E., Técnicas Financeiras, Univ. Lusíada Editora

MATEMÁTICA FINANCEIRA

O conteúdo deste livro versa sobre noções elementares de Matemática Financeira nas suas vertentes teórica e prática. Apresenta-se como um manual de estudo e de suporte em aplicações profissionais, nomeadamente em aspetos relacionados com a prática bancária e seguradora.

A nível académico, destina-se aos estudantes dos cursos de gestão empresarial, gestão bancária e seguradora, contabilidade e auditoria, economia e métodos quantitativos de análise e gestão financeira.

Como ponto de partida, exprime a razão de ser desta temática, ou seja, o valor do dinheiro ao longo do tempo e das variáveis que lhe estão associadas.

Por toda a extensão dos capítulos são desenvolvidas, em termos matemáticos, as fórmulas que são utilizadas na resolução de casos práticos. Desde a utilização do capital por terceiros, através de operações de empréstimo, ou pela aplicação desse capital em investimentos, apuramento de taxas e juros, cálculo e determinação de rendas, este livro contempla as matérias normalmente lecionadas nos cursos superiores desta unidade curricular, constituindo um manual de referência para estudantes e professores.

Visite-nos em
livraria.vidaeconomica.pt

