

A presente edição segue a grafia do Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

info@marcador.pt
www.marcador.pt
facebook.com/marcadoreditora

© 2016, Direitos reservados para Marcador Editora
uma empresa Editorial Presença
Estrada das Palmeiras, 59
Queluz de Baixo
2730-132 Barcarena

HOW NOT TO BE WRONG. Copyright © 2014 by Jordan Ellenberg.

Publicado por acordo com Penguin Books.

Todos os direitos reservados.

Nenhuma parte deste livro pode ser utilizada ou reproduzida em qualquer forma sem permissão por escrito do proprietário legal.

Título original: *How Not To Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking*

Título: *Como Não Errar – O Poder do Pensamento Matemático no Dia a Dia*

Autor: Jordan Ellenberg

Tradução: Hugo Gonçalves

Revisão: Sérgio Fernandes

Pré-impressão: Fotocompográfica, Lda.

Imagens do interior: gentilmente cedidas pelo autor

Capa: Marina Costa/Marcador Editora

Imagens de capa: © Shutterstock

Fotografia do autor: © Mats Rudels

Impressão e acabamento: Multitipo – Artes Gráficas, Lda.

ISBN: 978-989-754-253-4

Depósito legal: 411 589/16

1.^a edição: julho de 2016

ÍNDICE

Quando é que vou usar isto?	11
-----------------------------------	----

PARTE I

LINEARIDADE

Um. Menos como a Suécia	31
Dois. Demasiado reta localmente, globalmente curva	41
Três. Toda a gente é obesa	61
Quatro. Quanto é que isso é em americanos mortos?	73
Cinco. Mais tarte do que prato	89

PARTE II

INFERÊNCIA

Seis. O corretor de Baltimore e o código da Bíblia	101
Sete. Peixes mortos não leem pensamentos	115
Oito. <i>Reductio ad</i> improvável	143
Nove. O jornal internacional da vidência	157
Dez. Estás aí, Deus? Sou eu, a inferência bayesiana	175

PARTE III
EXPECTATIVA

Onze. O que esperar quando espera ganhar a lotaria 205
Doze. Perca mais voos! 243
Treze. Onde se encontram os carris do comboio 263

PARTE IV
REGRESSÃO

Catorze. O triunfo da mediocridade 305
Quinze. A elipse de Galton 321
Dezasseis. O cancro do pulmão faz-nos fumar cigarros? 357

PARTE V
EXISTÊNCIA

Dezassete. Não existe essa coisa da opinião pública 375
Dezoito. «Do nada, criei um universo estranho» 403

Como estar certo 431

Agradecimentos 449
Notas 453

QUANDO É QUE VOU USAR ISTO?

Agora mesmo, numa sala de aula algures no mundo, uma estudante está a reclamar com o seu professor de matemática. Este acabou de lhe pedir para usar uma parte substancial do seu fim de semana a calcular uma lista de trinta integrais definidas.

A estudante preferia estar a fazer outras coisas. A verdade é que ela preferiria fazer qualquer outra coisa. Sabe-o perfeitamente, porque passou uma parte substancial do fim de semana anterior a calcular outra lista — mas não muito diferente — de integrais definidas. Não percebe a utilidade de voltar a fazê-lo, e é isso que diz ao seu professor. E, em algum momento dessa conversa, a estudante irá fazer a pergunta mais temida por ele:

«Quando é que vou usar isto?»

O professor de matemática dir-lhe-á algo do género:

«Eu sei que isto te parece aborrecido, mas, lembra-te, não sabes ainda que carreira vais escolher. Podes não ver a relevância disto agora, mas podes escolher uma área em que seja muito importante resolver integrais definidas, correta e rapidamente, à mão».

Raramente esta resposta é satisfatória para um estudante. Porque é uma mentira. E tanto o professor como a estudante sabem que o é. O número de adultos que alguma vez irá fazer uso da integral de $(1 - 3x + 4x^2)^{-2} dx$, ou da fórmula para o cosseno de 3θ , ou da divisão sintética ou das funções polinomiais, pode ser contado em poucos milhares.

A mentira também não satisfaz o professor. Eu sei bem: nos meus anos como professor universitário de matemática pedi a muitas centenas de estudantes para calcularem listas de integrais definidas.

Felizmente, há uma resposta melhor. Que é a seguinte:

«A matemática não é apenas uma sequência de cálculos que devem ser feitos como um rito de passagem, até que a nossa paciência ou a nossa resistência se esgotem — ainda que pareça isso mesmo tendo em conta o que aprendi em aulas de matemática. Essas integrais são para o matemático o que o treino de pesos e a calistenia são para o futebolista. Se quer jogar futebol — quero dizer, jogar mesmo, a um nível profissional —, terá de fazer uma série de exercícios aborrecidos, repetitivos e aparentemente inúteis. Em algum momento do jogo os atletas usam esses exercícios? Bem, não vemos ninguém no campo a levantar pesos ou a fazer ziguezagues entre cones de plástico. Mas vemos os jogadores a usarem a força, a velocidade, a perspetiva e a flexibilidade que ganharam a fazer esses exercícios, semana entediante após semana entediante. Aprender esses exercícios é parte de aprender a jogar futebol.

«Se quer jogar futebol profissionalmente ou, pelo menos, a um nível elevado, irá passar muitos dias aborrecidos a treinar. Não há outra maneira. Mas também há boas notícias. Se os exercícios são de mais para si, ainda pode jogar com amigos para se divertir. Pode desfrutar tanto da emoção de fazer um passe rasgado entre dois defesas ou de marcar um golo de fora da área como desfruta um atleta profissional. Será mais saudável e mais feliz do que seria se ficasse sentado no sofá a ver os profissionais na TV.

«A matemática é exatamente o mesmo. Podemos não querer uma carreira ligada à matemática. Tudo bem — a maioria das pessoas não quer. Mas podemos usar a matemática na mesma. Provavelmente já a estaremos a usar, mesmo que não lhe chamemos assim. A matemática está presente na forma como raciocinamos. E torna-nos melhores em muitas coisas. Saber matemática é como usar um par de óculos com visão de raios X, que revelam estruturas escondidas debaixo da confusa e caótica superfície do mundo. A matemática é a ciência para não estarmos errados acerca das coisas; as suas técnicas e os seus hábitos evoluíram ao longo de séculos de trabalho duro e de argumentação. Com as ferramentas da matemática na mão, poderá entender o mundo de uma forma mais profunda, mais sólida, com mais sentido. Tudo o que precisa é de um treinador, ou apenas de um livro, que lhe ensine as regras e algumas táticas. Eu serei o seu treinador. Irei mostrar-lhe como se faz.»

Por razões de tempo, raramente é isto que digo, de facto, numa sala de aula. Mas num livro há espaço para me alongar um pouco mais. Espero poder sustentar as grandes afirmações que acabei de fazer, mostrando ao leitor que os problemas sobre os quais pensamos todos os dias — problemas políticos, médicos, comerciais, teológicos — estão entranhados pela matemática. Perceber isso providência descobertas que não estão acessíveis em mais meio nenhum.

Mesmo que eu fizesse um discurso cheio de inspiração diante da minha estudante, ela poderia — se for realmente muito esperta — ficar pouco convencida.

«Isso é muito bonito, professor», diria ela. «Mas é bastante abstrato. Diz que, com a matemática ao nosso dispor, podemos fazer bem as coisas que, de outra maneira, faríamos de forma errada. Mas que tipo de coisas? Dê-me um exemplo. Dê-me um exemplo real.»

E nesse momento eu contar-lhe-ia a história de Abraham Wald e dos buracos de bala desaparecidos.

ABRAHAM WALD E OS BURACOS DE BALA DESAPARECIDOS

Esta história, como muitas outras acerca da Segunda Guerra Mundial, começa com os nazis a perseguirem um judeu, expulsando-o da Europa, e acaba com eles a pagarem por isso. Abraham Wald nasceu em 1902 naquela que era, então, a cidade de Klausenbourg, naquele que também era, então, o Império Austro-Húngaro. Quando Wald era adolescente, aconteceu a Primeira Guerra Mundial e a sua cidade passou a ser Cluj, na Roménia. Era neto de um rabino e filho de um padeiro *kosher*, mas o jovem Wald também fora matemático desde muito cedo. O seu talento para esta disciplina foi rapidamente reconhecido, e ele foi aceite para estudar matemática na Universidade de Viena, onde foi atraído para objectos de estudo abstratos e recônditos, mesmo segundo os parâmetros da matemática pura: teoria dos conjuntos e espaços métricos.

Porém, quando Wald terminou os seus estudos, estávamos nós em meados da década de 1930, a Áustria tinha graves problemas financeiros, e não havia a possibilidade de um estrangeiro ser contratado como professor em Viena. Wald foi salvo por uma oferta de trabalho feita por Oskar Morgenstern. Este haveria de imigrar, mais tarde, para os Estados Unidos e de participar na invenção da Teoria dos Jogos, mas, em 1933, era diretor do Instituto Austríaco de Investigação Económica, e

contratou Wald, por um pequeno salário, para fazer estranhos trabalhos matemáticos. E essa acabou por ser uma boa decisão para Wald: a sua experiência com assuntos económicos valeu-lhe a oferta de uma bolsa na Cowles Commission, um instituto económico localizado em Colorado Springs, nos Estados Unidos. Apesar da situação política na Europa, que piorava rapidamente, Wald estava reticente em dar um passo que o afastaria da matemática pura de uma vez por todas. Mas, então, os nazis invadiram a Áustria, tornando a decisão de Wald substancialmente mais fácil. Depois de apenas alguns meses no Colorado, foi-lhe oferecida uma cadeira de estatística na Universidade de Columbia; voltou a fazer as malas e mudou-se para Nova Iorque.

E foi aí que participou na guerra.

O Grupo de Pesquisa Estatística (GPE), no qual Wald participou durante a Segunda Guerra Mundial, era um programa confidencial que contribuía com o poder conjunto dos estatísticos americanos no esforço de guerra — algo como o Manhattan Project, mas, em vez de desenvolver armas nucleares, desenvolvia estatísticas. E o GPE encontrava-se, de facto, em Manhattan, no número 401 da West 118th Street, em Morningside Heights, apenas a um quarteirão da Universidade de Columbia. O edifício do GPE alberga agora apartamentos da faculdade e alguns consultórios médicos, mas, em 1943, era o centro nervoso da matemática em tempo de guerra. No Grupo de Matemática Aplicada de Columbia, dezenas de jovens raparigas debruçavam-se sobre calculadoras Marchant, calculando fórmulas relativas à curva ótima que um caça deveria traçar no céu a fim de manter um avião inimigo na mira. Noutro apartamento, uma equipa de pesquisadores da Universidade de Princeton estava a desenvolver protocolos para bombardeamentos estratégicos. E o grupo de Columbia, que estava a trabalhar no projeto da bomba atómica, encontrava-se na porta ao lado.

Mas o GPE era o que tinha mais poder e, no final de contas, aquele com mais influência entre todos os outros grupos, combinando a abertura intelectual e a intensidade de um departamento académico, e partilhando o mesmo sentido de missão que surge quando está em jogo algo muito importante. «Quando fazemos recomendações», escreveu o diretor, W. Allen Wallis, «é frequente que as coisas aconteçam de acordo com elas. Os caças entravam em combate com as metralhadoras carregadas de acordo com as recomendações de Jack Wolfowitz¹ relativas

¹ Pai de Paul Wolfowitz.

a misturar diferentes tipos de munições, e talvez os pilotos regressassem — ou não. Os aviões da Marinha lançavam foguetes cujo combustível tinha sido aceite pelos planos de inspeção das amostras de Abe Girshick, e talvez aqueles explodissem e destruíssem os aviões americanos e os seus pilotos, ou talvez destruíssem os alvos.»

O talento matemático disponível igualava a gravidade da missão. Nas palavras do próprio Wallis, o GPE era «o mais extraordinário grupo de estatísticos alguma vez organizado, tanto quantitativa como qualitativamente». Frederick Mosteller, que mais tarde iria fundar o Departamento de Estatística de Harvard, fazia parte do grupo. Leonard Jimmie Savage também — o pioneiro da Teoria da Decisão e um grande apologista do campo de conhecimento que viria a ser chamado Estatística Bayesiana.² Norbert Wiener, o matemático do MIT, e criador da Cibernética, aparecia de vez em quando. Este era um grupo no qual Milton Friedman, futuro prémio Nobel da Economia, era com frequência apenas a quarta pessoa mais inteligente na sala.

Porque a mais inteligente costumava ser Abraham Wald. Este tinha sido professor de Allen Wallis na Universidade de Columbia, e era uma espécie de eminência matemática do grupo. Sendo, ainda, «um inimigo estrangeiro», tecnicamente não lhe era permitido ter acesso aos relatórios confidenciais que ele próprio produzia; a piada no GPE era que as secretárias tinham de lhe tirar as folhas de papel das mãos assim que ele acabava de escrever. Wald era, de certa maneira, um participante improvável. A sua inclinação, desde sempre, era para a abstração, longe das aplicações diretas do conhecimento. Mas a motivação para usar o seu talento contra as forças do Eixo era óbvia.

E, quando era preciso transformar uma ideia vaga em matemática sólida, Wald era a pessoa que todos queriam ter ao seu lado.

Então, aqui fica a questão. Não queremos que os aviões sejam abatidos pelos caças inimigos, por isso, vamos blindá-los. Porém, a blindagem torna o avião mais pesado, e os aviões mais pesados são mais difíceis de manobrar e gastam mais combustível. Blindar demasiado os aviões é um problema; blindá-los pouco é um problema. E, entre

² Savage era quase cego, apenas era capaz de ver pelo canto de um dos olhos, e, a certa altura, passou seis meses a comer somente *pemmican*, de forma a comprovar a sua opinião sobre a exploração do Ártico. Achei que isto devia ser mencionado. *Pemmican* é uma mistura nutritiva de gordura e proteínas. (NT)

um caso e outro, haverá um ponto ótimo. A razão pela qual se tem uma equipa de matemáticos enfiada num apartamento em Nova Iorque é exatamente para descobrir onde se localiza esse ponto ótimo.

Os militares chegaram ao GPE com informação que pensavam que seria útil. Quando os aviões americanos regressavam de combates na Europa, vinham cobertos de buracos de bala. Mas os estragos não estavam espalhados de forma igual pelo avião. Havia mais buracos de bala na fuselagem, mas poucos no motor.

Secção do avião	Balas por pé quadrado
Motor	1,11
Fuselagem	1,73
Sistema de combustível	1,55
Restante do avião	1,8

Os oficiais viram uma oportunidade para a eficiência; poderiam ter a mesma proteção com menos blindagem se concentrassem a blindagem nas secções de que mais precisavam, aquelas em que os aviões recebiam mais disparos. Mas, exatamente, quanta blindagem a mais deveria ser aplicada nessas secções do avião? Essa era a pergunta que tinham para Wald. Porém, não foi a resposta a essa questão que obtiveram. A blindagem, disse Wald, não deve ser aplicada onde estão os buracos de bala, mas onde eles não estão: no motor. A sua descoberta resultava desta pergunta: onde estão os buracos que faltam, aqueles que se encontrariam por toda a secção do motor se os estragos estivessem espalhados de forma igual por todo o avião? Wald tinha a certeza de que sabia a resposta. Os buracos de bala que faltavam estavam nos aviões abatidos. A razão pela qual os aviões regressavam com menos disparos no motor devia-se ao facto de os aviões que eram atingidos no motor não regressarem. Por outro lado, o grande número de aviões que regressava à base com a fuselagem esburacada como um queijo suíço constituía uma prova forte de que os disparos nesta parte do aparelho podem (e, por isso, devem) ser tolerados. Se formos a uma ala de recuperação no hospital, veremos muito mais pessoas com buracos de bala nas pernas do que no peito. Mas isso não quer dizer que as pessoas não recebam disparos no peito; a questão é que as pessoas que recebem disparos no peito não recuperam. Aqui fica um velho truque matemático que ilustra isto claramente: atribua zero às variáveis. Neste caso, a variável

a trabalhar é a probabilidade de um avião atingido no motor se manter no ar. Atribuir zero a uma variável significa que um disparo no motor irá abater o avião. Como seriam os dados relativos à questão? Havia aviões que regressavam com buracos de bala nas asas, na fuselagem, no nariz — mas nenhum no motor. O analista militar tem duas opções para explicar isto: ou as balas alemãs, por acaso, embatiam em todas as partes do avião menos numa, ou o motor é um ponto de total vulnerabilidade. Ambas as histórias explicam os dados em questão, mas a segunda opção fazia muito mais sentido. A blindagem deve estar onde as balas não estão.

As recomendações de Wald foram rapidamente postas em prática, e ainda eram usadas pela Marinha e pela Força Aérea nas guerras da Coreia e do Vietname. Não posso dizer exatamente quantos aviões americanos foram salvos por causa disso, embora os herdeiros do GPE, que lidam com estes dados, e que hoje trabalham para os militares, tenham uma boa ideia de quantos foram. Uma coisa que, por norma, as entidades militares perceberam muito bem é que os países não ganham guerras apenas porque os seus soldados são mais corajosos do que o inimigo, ou porque acreditam mais na liberdade, ou porque são os preferidos de Deus. Os vencedores são normalmente aqueles que veem menos de 5% dos seus aviões abatidos, ou que usam 5% de combustível a menos, ou que têm mais 5% de nutrição na infantaria a 95% do custo. Mas isso não é matéria para os filmes de guerra; no entanto, é exatamente disso que as guerras são feitas. E existe matemática em cada passo do caminho.

O que é que Wald viu que os oficiais, que tinham um conhecimento e um entendimento muito mais vastos sobre combates aéreos, não conseguiram ver? Tem tudo que ver com os hábitos de pensamento treinados pela matemática. Um matemático está sempre a perguntar: «Que suposições estamos a fazer? São justificadas?» Isto pode ser irritante. Mas também pode ser muito produtivo. Neste caso, estavam a fazer suposições involuntariamente: que os aviões que regressavam eram um exemplo aleatório de todos os aviões. Se isso fosse verdade, poderíamos tirar conclusões sobre a distribuição dos buracos de bala em todos os aviões, examinando a distribuição daqueles somente nos aviões que regressavam. Uma vez que reconhecemos que essa era a nossa hipótese, só precisamos de um momento para percebermos que estamos completamente errados; não há razão nenhuma para se esperar que os aviões

tenham a mesma probabilidade de sobrevivência independentemente do lugar onde são atingidos. Usando a linguagem matemática, à qual regressaremos no capítulo 15, o índice de sobrevivência e a localização do disparo estão *correlacionados*.

A outra vantagem de Wald era a sua tendência para a abstração. Wolfowitz, que foi aluno dele na Universidade de Columbia, escreveu que os problemas que o seu professor preferia «eram do género mais abstrato», e que ele estava «sempre pronto para falar de matemática, mas pouco interessado na sua popularização e nas suas aplicações especiais».

A personalidade de Wald tornava difícil que ele focasse a sua atenção em problemas com aplicações práticas, é verdade. Os pormenores dos aviões e das armas, a seu ver, não eram mais do que um revestimento — e ele espreitava, através dos suportes matemáticos, os pregos que uniam a história. Por vezes, essa abordagem leva-nos a ignorar questões relevantes do problema, e que são realmente importantes. Mas também nos deixa ver o esqueleto comum, que é partilhado pelos problemas que, à superfície, parecem semelhantes. Dessa maneira, revelamos ter uma experiência significativa mesmo em áreas nas quais, aparentemente, não possuímos nenhuma.

Para um matemático, a estrutura subjacente ao problema do buraco da bala é um fenómeno chamado preconceito de sobrevivência. E que surge, uma e outra vez, em todo o tipo de contextos. Uma vez familiarizados com ele, como Wald estava, estaremos prontos a descobri-lo onde quer que se esconda.

É o que acontece com os fundos mútuos de investimento. A avaliação do desempenho dos fundos mútuos é uma área na qual não queremos estar errados, mesmo que seja por pouco. Uma mudança de 1% no crescimento anual pode ser a diferença entre uma mais-valia financeira e lixo. Os fundos do tipo Large Blend, da Morningstar cujos fundos mútuos de investimento apostam em grandes empresas que representam o S&P 500, são do primeiro género. Os fundos deste tipo cresceram uma média de 178,4% entre 1995 e 2004: uns saudáveis 10,8% ao ano.³ Parece que nos sairíamos bem se tivéssemos dinheiro para investir nestes fundos, certo?

Não. Um estudo de 2006, feito pela Savant Capital, mostrou uma realidade mais fria acerca desses números. Pense de novo em como é

³ Para sermos justos, o índice S&P 500 até fez melhor, crescendo 212,5% no mesmo período.

que a Morningstar gera aqueles números. Estamos em 2004; peguemos em todos os fundos designados por Large Blend e veremos quanto cresceram nos últimos dez anos.

Porém, está a faltar algo: os fundos que não estão lá. Os fundos mútuos não são eternos. Alguns florescem, outros morrem. Os que morrem são, de longe, aqueles que não fazem dinheiro. Por isso, avaliar uma década de fundos mútuos apenas com aqueles que ainda existem, ao fim de dez anos, é como avaliar as manobras evasivas de um piloto de caças contando os buracos de bala nos aviões que regressaram. O que aconteceria se não se encontrasse mais do que uma bala por avião? Certamente, isso não nos diria que os pilotos americanos são brilhantes a escapar do fogo inimigo, mas que os aviões que foram atingidos duas vezes se despenharam.

O estudo da Savant descobriu que, caso se incluísse o desempenho dos fundos mortos, a par dos vivos, o índice de retorno cairia para os 134,5%, um índice mais vulgar de 8,9% ao ano. Pesquisas mais recentes corroboraram a descoberta: um estudo exaustivo, de 2011, realizado pela *Review of Finance*, que cobriu quase cinco mil fundos, descobriu que o excedente do índice de retorno dos 2641 fundos sobreviventes é cerca de 20% mais elevado do que o mesmo número recalculado se tivermos em conta os que morreram. O tamanho do efeito de sobrevivência deve ter surpreendido os investidores, mas certamente não teria o mesmo efeito em Abraham Wald.

A MATEMÁTICA É A EXTENSÃO DO SENSO COMUM ATRAVÉS DE OUTROS MEIOS

A esta altura, a estudante adolescente irá interromper o professor e perguntar, sensatamente: «Onde está a matemática nisto?» Wald era um matemático, é verdade, e não se pode negar que a sua solução para o problema dos buracos de bala é engenhosa, mas o que é que isso tem de matemática? Não se viu trigonometria, integrais, desigualdades ou fórmulas.

Primeiro: Wald usou fórmulas. Conte a história sem as incluir porque estamos apenas na introdução. Se, por exemplo, escrevermos um livro a explicar a reprodução humana a pré-adolescentes, a introdução não alcança as questões mais «hidráulicas» acerca de como é que o bebé vai parar à barriga da mãe. Em vez disso, começa-se com algo como «Tudo muda na Natureza; as árvores perdem as folhas no inverno,

que voltam a crescer na primavera; o humilde bicho-da-seda entra no seu casulo e emerge mais tarde como uma magnífica borboleta. Tu também és parte da Natureza, e...»

É nessa parte do livro que estamos agora.

Porém, somos todos adultos. Mudando o foco, aqui fica uma página do relatório de Wald:

lower bound to the Q_i could be obtained. The assumption here is that the decrease from q_i to q_{i+1} lies between definite limits. Therefore, both an upper and lower bound for the Q_i can be obtained.

We assume that

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i ,$$

where $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ and such that the expression

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_0 \quad (A)$$

is satisfied.

The exact solution is tedious but close approximations to the upper and lower bounds to the Q_i for $i < n$ can be obtained by the following procedure. The set of hypothetical data used is

$$\begin{array}{ll} a_0 = .780 & a_3 = .010 \\ a_1 = .070 & a_4 = .005 \\ a_2 = .040 & a_5 = .005 \\ \lambda_1 = .80 & \lambda_2 = .90 \end{array}$$

Condition A is satisfied, since by substitution

$$.07 + \frac{.04}{.8} + \frac{.01}{(.8)^3} + \frac{.005}{(.8)^6} + \frac{.005}{(.8)^{10}} = .20529 ,$$

which is less than

$$1 - a_0 = .22 .$$

THE LOWER LIMIT OF Q_i

The first step is to solve equation 66. This involves the solution of the following four equations for positive roots g_0, g_1, g_2, g_3 .

Espero que não seja demasiado chocante.

No entanto, a verdadeira ideia por trás da descoberta de Wald não requer nenhum do formalismo que vemos no seu relatório. Já o explicá-mos, e sem usar uma noção matemática de qualquer espécie. Por isso, a pergunta da estudante mantém-se. O que faz desta uma história sobre matemática? Não se trata apenas de senso comum?

Sim. A matemática é senso comum. Num nível básico, isso é evidente.

Como explicar a alguém a razão pela qual adicionar sete coisas a cinco coisas produz o mesmo resultado que adicionar cinco coisas a sete coisas? Não é possível explicá-lo: o facto está entranhado na nossa maneira de pensar relativamente a combinar coisas. Os matemáticos gostam de dar nomes aos fenómenos que são descritos pelo nosso senso comum: em vez de dizerem «Esta coisa adicionada àquela coisa é a mesma coisa que aquela coisa adicionada a esta coisa», dizem «A adição é comutativa». Ou, porque gostamos dos nossos símbolos, escrevemos:

Para qualquer escolha de a e b , $a + b = b + a$.

Apesar da aparência oficial da fórmula, estamos a falar de um facto intuitivamente compreendido por qualquer criança.

A multiplicação já é uma história diferente. A fórmula parece bastante similar:

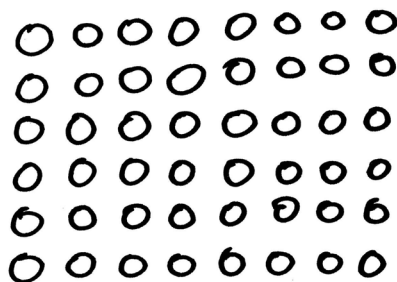
Para qualquer escolha de a e b , $a \times b = b \times a$.

A mente, diante desta afirmação, não diz «isso é óbvio» de uma forma tão imediata como acontece com a adição.

É do «senso comum» que dois conjuntos de seis coisas são o mesmo que seis conjuntos de duas coisas? Talvez não; mas pode tornar-se senso comum. Eis a minha primeira memória matemática. Estou deitado no chão, na casa dos meus pais, com a bochecha pressionada contra a alcatifa, a olhar para a aparelhagem de som. Muito provavelmente, estaria a ouvir o lado B do *Blue Album*, dos Beatles. Talvez tivesse seis anos. Estamos na década de 1970 e, como tal, a aparelhagem encontra-se num móvel de madeira, que tem um retângulo com buracos em cada lateral. Oito filas de buracos. Seis colunas de buracos. Estou ali

deitado, a olhar para os buracos. As seis colunas de buracos. As oito filas de buracos. Mudando a direção do olhar, podia fazer com que a minha mente visse ora as filas ora as colunas. Seis filas com oito buracos. Oito colunas com seis buracos.

E foi então que percebi — oito grupos de seis eram o mesmo que seis grupos de oito. Não que esta fosse uma regra que me tivessem ensinado, mas apenas porque não podia ser de outra maneira. O número de buracos no painel era o número de buracos no painel, independentemente da forma como os contasse.



A aparelhagem dos meus pais, 1977

Temos tendência a ensinar a matemática como uma longa lista de regras. Aprendemo-las de forma a obedecer-lhes, porque, caso não o façamos, temos má nota no teste. Mas a matemática não é isso. A matemática é o estudo das coisas que resultam de certa maneira porque não pode ser de outra forma.

Agora sejamos honestos: nem tudo na matemática pode ser explicado de uma maneira tão transparente para a nossa intuição como a adição e a multiplicação. Não se pode fazer cálculo através do senso comum. Mas o cálculo é derivado deste — Newton pegou na nossa intuição física sobre o movimento dos objetos em linha reta, formalizou-o, e depois montou, no topo dessa estrutura formal, uma descrição matemática universal do movimento. Uma vez com a teoria de Newton em mãos, podemos aplicá-la a problemas que nos deixariam com a cabeça a girar caso não tivéssemos equações para os resolver. Da mesma maneira, temos sistemas mentais incorporados para avaliar a probabilidade de um resultado incerto. Porém, esses sistemas são bastante fracos e pouco confiáveis, especialmente quando relativos a eventos extremamente

raros. É então que apoiamos a nossa intuição em algumas técnicas e alguns teoremas sólidos e bem colocados, e fazemos disso uma teoria matemática das probabilidades.

A linguagem especializada com que os matemáticos conversam uns com os outros é uma ferramenta magnífica para expressar ideias complexas com precisão e rapidez. Mas a estranheza que causa pode criar, entre os que não são matemáticos, a impressão de uma esfera de pensamento totalmente alienígena em relação ao pensamento comum. Isso está errado.

A matemática é como uma prótese de energia nuclear que anexamos ao nosso senso comum, multiplicando amplamente o seu alcance e o seu poder. Apesar do poder da matemática, e apesar da sua notação impeditiva e da sua abstração, o trabalho mental que, de facto, está envolvido não é muito diferente da maneira como nós pensamos em problemas mais terra a terra. Tenho em mente uma imagem do Homem de Ferro a atravessar uma parede com um murro. Por um lado, a força que quebra a parede não é fornecida pelos músculos do Tony Stark, mas sim por uma série de servomecanismos primorosamente sintonizados e cujo poder resulta de um gerador de partículas *compact beta*. Por outro lado, do ponto de vista de Tony Stark, o que ele faz é dar um soco na parede, exatamente como faria sem a sua armadura. Mas com muito, muito mais força.

Parafraseando Clausewitz: a matemática é a extensão do senso comum através de outros meios.

Sem a estrutura rigorosa que a matemática providencia, o senso comum pode deixar-nos perdidos. Foi isso que aconteceu aos oficiais que queriam armaduras reforçadas nas partes dos aviões que já eram suficientemente seguras. Mas a matemática formal, sem senso comum — sem a constante interação entre o raciocínio abstrato e as nossas intuições sobre quantidade, tempo, espaço, movimento, comportamento e incerteza —, seria apenas um exercício estéril sobre como seguir regras e fazer contabilidade. Por outras palavras, a matemática seria, de facto, aquilo que a irritada estudante de cálculo acredita que é. Esse é o verdadeiro perigo. John von Neumann, em 1947, no seu ensaio *The Mathematician*, alertou:

Quando uma disciplina matemática viaja para longe da sua fonte empírica, ou é de segunda ou terceira geração, apenas inspirada indiretamente pelas ideias que chegam

da «realidade», é acometida por graves perigos. Torna-se mais e mais estética pura, mais e mais a arte pela arte. Isto não algo é necessariamente mau, se o campo de estudo estiver cercado por disciplinas correlacionadas, que ainda têm conexões empíricas próximas, ou se a disciplina estiver sob a influência de homens de um gosto exceccionalmente bem desenvolvido. Porém, há o perigo grave de a disciplina se desenvolver com uma resistência mínima, de o rio, tão longe da fonte, se separar numa multitude de riachos insignificantes, e de a disciplina se tornar uma massa desorganizada de detalhes e complexidades. Por outras palavras, a uma grande distância da sua fonte empírica, ou depois de muita «endogamia abstrata», uma disciplina matemática está em risco de degeneração.⁴

QUE TIPO DE MATEMÁTICA IRÁ APARECER NESTE LIVRO?

Se o seu conhecimento de matemática resultar inteiramente dos anos que passou na escola, então saiba que ouviu uma história que é muito limitada e, de uma forma muito importante, falsa. A matemática na escola é amplamente constituída por uma sequência de factos e regras; factos que estão certos; regras que vêm de uma autoridade cimeira e que não podem ser questionadas. Trata-se, dessa maneira, as questões da matemática como algo completamente estabelecido.

A matemática não está resignadamente estabelecida. Mesmo considerando os objetos básicos de estudo, como números e figuras geométricas, a nossa ignorância é muito maior do que o nosso conhecimento. E as coisas que sabemos só foram descobertas depois de um esforço colossal, contenção e confusão. Todo o suor, todo o tumulto, é cuidadosamente mantido afastado do seu livro de estudo escolar.

Há factos e factos, claro. Nunca houve muita controvérsia sobre se $1 + 2 = 3$. Como e se podemos verdadeiramente provar que $1 + 2 = 3$, uma questão que oscila desconfortavelmente entre a matemática e a

⁴ A visão da natureza da matemática por parte de Von Neumann é sólida mas é justo sentirmo-nos um pouco enjoados com a sua caracterização da matemática como sendo algo puramente estético, que acaba em degeneração. Von Neumann escreveu isto apenas dez anos depois da exposição *Entartene Kunst* («arte degenerada») na Berlim de Hitler, que defendia que *l'art pour l'art* era o género de coisa de que os judeus e os comunistas gostavam, e que era criada para destruir a arte «realista» exigida por um vigoroso estado germânico. Tendo em conta as circunstâncias, costumamos ficar um pouco na defensiva diante da matemática que parece não ter um propósito aparente. Um escritor com compromissos políticos diferentes dos meus abordaria, a esta altura, o energético trabalho de Von Neumann sobre o desenvolvimento e a produção de armas nucleares.

filosofia, é outra história — e lá regressaremos no final do livro. Porém, que o cálculo está correto, essa é a simples verdade. O tumulto está noutro lugar. E iremos vê-lo diversas vezes. Os factos matemáticos podem ser simples ou complicados, e podem ser superficiais ou profundos. Isto divide o universo matemático em quatro quadrantes:

Profunda	VOCÊ ESTÁ AQUI ↖ ↑	Fermat Poincaré Hipótese de Riemann Geometria algebraica Espaços perfectoides ...
Superficial	$1+2=3$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int x^{-1} \sqrt{x^3-1} dx =$ $2\sqrt[3]{x^3-1} \cdot$ $\left(1 - \frac{\tanh^{-1}(\sqrt{1-x^3})}{\sqrt{1-x^3}}\right)$ $+ C$
	simples	complicado

Factos aritméticos básicos, como $1 + 2 = 3$, são simples e superficiais. Tal como o são identidades básicas como $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ou as equações de segundo grau, que são mais difíceis de aceitarmos do que $1 + 2 = 3$, mas, no fim, não têm muito peso conceptual.

Mudando para o quadrante complicado/superficial, temos o problema de multiplicar dois números de dez dígitos, ou a solução de uma integral definida complicada, ou, depois de um par de anos na faculdade, o endomorfismo de Frobenius ou o teorema da modularidade. É concebível que possamos precisar de saber o que são, e é inquestionável que seria aborrecido, se não impossível, usá-los sem preparação; no caso do teorema da modularidade, talvez precisássemos de um estudo sério para interpretar o que nos seria pedido. Mas, sabendo do que se trata, não enriquece realmente o nosso conhecimento acerca do mundo.

É no quadrante complicado/profundo que os matemáticos profissionais como eu tentam ocupar a maioria do seu tempo. É aí que residem os teoremas famosos e as conjecturas: a Hipótese de Riemann, o

Último Teorema de Fermat,⁵ a Conjetura de Poincaré, *P versus NP*, o Teorema de Gödel. Cada um destes teoremas envolve ideias de significado profundo, de importância fundamental, de beleza avassaladora e tecnicidade brutal, e cada um deles é protagonista de livros.

Mas este livro não. Este livro vai estar no quadrante superior esquerdo: simples e profundo. As ideias matemáticas que queremos tratar são aquelas às quais se pode ter acesso direta e vantajosamente, quer o treino matemático do leitor se fique pela pré-álgebra, quer se estenda muito para além disso. E não são «meros factos», como uma simples afirmação aritmética — trata-se de princípios, cuja aplicação se alarga muito para além das coisas que estamos habituados a considerar como matemáticas. São as ferramentas essenciais no cinto de ferramentas e, se forem usadas corretamente, irão ajudá-lo a não estar errado.

A matemática pura pode ser uma espécie de convento, um lugar sossegado, afastado de forma segura das influências perniciosas da confusão e da inconsistência do mundo. Eu cresci dentro dessas paredes. Outros miúdos meus conhecidos que adoravam matemática eram tentados pela sua aplicação à física, à ciência genómica ou à arte negra da gestão de *hedge funds*, mas eu não queria essa diversidade.⁶ Como estudante universitário, dediquei-me à teoria dos números, àquilo a que Gauss chamou «a rainha da matemática», o mais puro dos temas, o jardim selado no centro do convento, onde contemplamos as mesmas questões sobre números e equações que já inquietavam os gregos e que não se tornaram menos irritantes nos dois mil e quinhentos anos que se seguiram.

Primeiro, trabalhei na teoria dos números com um sabor clássico, provando factos acerca de somas das potências de números inteiros, algo que poderia, se necessário, explicar à minha família no Natal, mesmo que não conseguisse explicar como o provara. Não muito depois, fui instigado a lidar com realidades ainda mais abstratas, investigando problemas em que os atores básicos — «representações de Galois residualmente modulares», «co-homologia de esquemas modulares», «sistemas dinâmicos de espaços homogêneos», coisas deste género — não eram

⁵ Que, entre os profissionais, é agora chamado Teorema de Wiles, uma vez que Andrew Wiles o provou (com a assistência crítica de Richard Taylor) e Fermat não o fez. Mas talvez nunca se venha a perder o nome tradicional.

⁶ Para ser honesto, passei parte dos meus 20 anos a pensar que talvez quisesse ser um romancista literário sério. Cheguei a terminar um romance literário muito sério, intitulado *The Grasshopper King*, que até foi publicado. Mas, durante esse processo, descobri que cada dia que dedicava à escrita do romance literário sério era um dia que passava amuado, desejando estar a trabalhar em problemas matemáticos.

suscetíveis de ser falados fora do arquipélago de um seminário ou das salas das faculdades das universidades de Oxford, Princeton, Quioto, Paris, Madison ou Wisconsin, onde agora sou professor. Quando digo que estas coisas são emocionantes, com sentido e bonitas, e que nunca me canso de pensar nelas, têm de acreditar em mim, porque é preciso muito estudo só para chegar ao ponto em que os objetos de estudo se materializam.

Porém, aconteceu uma coisa curiosa. Quanto mais abstrata e distante da experiência vivida ficava a minha pesquisa, mais eu notava quanta matemática havia no mundo além daquelas paredes. Nada de representações de Galois ou co-homologia, mas ideias que eram mais simples, mais velhas, e igualmente profundas — o quadrante noroeste do quadro anterior. Comecei a escrever artigos para revistas e jornais sobre a maneira como um mundo seria caso fosse visto através das lentes da matemática, e descobri, para minha surpresa, que até as pessoas que diziam que odiavam matemática estavam dispostas a ler esses textos. Era uma espécie de lição de matemática, mas diferente daquelas que tínhamos nas salas de aula.

O que tem em comum com a sala de aula é o facto de se pedir ao leitor que faça algum trabalho. De volta a Von Neumann em *The Mathematician*:

«É mais difícil entender o mecanismo de um avião, e as teorias sobre as forças que o levantam e o propulsionam, do que simplesmente voar nele, ser elevado e transportado por ele — ou até pilotá-lo. É excepcional que possamos adquirir a compreensão de um processo, tendo-o assimilado de uma forma instintiva e empírica, sem que previamente tenhamos uma profunda familiaridade com a forma como funciona, como se usa».

Por outras palavras: é bastante difícil entender a matemática sem fazer matemática. Não há uma estrada real para a geometria, como Euclides disse a Ptolomeu, ou talvez, dependendo da fonte, como Menecmo disse a Alexandre, *o Grande*. (Sejamos sinceros, máximas antigas e famosas, atribuídas a cientistas antigos, são provavelmente inventadas, mas nem por isso são menos instrutivas.)

Este não será o género de livro no qual faço vénias grandiosas aos grandes monumentos da matemática, instruindo o leitor sobre a melhor maneira de os admirar a partir de uma grande distância. Estamos aqui para sujar as mãos. Iremos calcular algumas coisas. Haverá algumas fórmulas e equações quando precisar delas para explicar algo importante.

Nenhuma matemática formal, além da aritmética, será necessária, embora muita matemática mais além da aritmética venha a ser explicada. Desenharei alguns gráficos básicos e tabelas. Iremos encontrar alguns tópicos da matemática da escola fora do seu *habitat* natural; veremos como, até que ponto, as funções trigonométricas descrevem duas variáveis que estão relacionadas entre si, o que o cálculo tem a dizer sobre a relação entre fenômenos lineares e não lineares, e como as equações de segundo grau servem de modelo cognitivo para a investigação científica. E também iremos encontrar alguma da matemática que costuma ser dada na faculdade, como a crise na teoria dos conjuntos, que aparece aqui como uma forma de metáfora para a jurisprudência do Supremo Tribunal norte-americano e a arbitragem no beisebol; desenvolvimentos recentes na teoria analítica dos números, que demonstram a relação entre estrutura e aleatoriedade; e a teoria da informação, e *designs* combinatórios, que ajudam a explicar como um grupo de estudantes do MIT ganhou milhões de dólares ao perceber como funcionava a lotaria do estado de Massachusetts. Haverá a casual fofoca sobre matemáticos de renome, e uma certa quantidade de especulação filosófica.

Até termos uma prova ou duas a apresentar. Mas não haverá trabalhos de casa, nem tão-pouco haverá teste.

PARTE I

• • • •

Linearidade

Inclui: a curva de Laffer, cálculo explicado numa página, a lei dos grandes números, diversas analogias terroristas, «Toda a gente na América terá peso a mais em 2048», porque o Dakota do Sul tem mais pacientes de cancro no cérebro do que o Dakota do Norte, os fantasmas das quantidades mortas, o hábito da definição