

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 11

# VARIÁVEL COMPLEXA

## CADERNOS DE MATEMÁTICA

- N.º 1 PRIMITIVAS
- N.º 2 SÉRIES
- N.º 3 LIMITES
- N.º 4 DERIVADAS
- N.º 5 INTEGRAIS
- N.º 6 MATRIZES
- N.º 7 VECTORES
- N.º 8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- N.º 9 TRIGONOMETRIA (No prelo)
- N.º 10 GEOMETRIA ANALÍTICA
- N.º 11 VARIÁVEL COMPLEXA

Os Autores escrevem de acordo com a antiga ortografia.

**Título:** CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 11 – VARIÁVEL COMPLEXA

**Autor:** António Monteiro, Isabel Matos e Virgínia Miranda

**Editor:** Edições Orion  
Apartado 7501  
Alfragide  
2721-801 Amadora  
[www.edorion.com](http://www.edorion.com)

**Capa:** Joana Torgal | Canto Redondo

**Ilustrações:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Arranjo gráfico e Fotocomposição:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Impressão e Acabamentos:** Cafílesa, Venda do Pinheiro

**ISBN:** 978-972-8620-36-3

**Depósito Legal n.º** 464439/19

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito do Editor, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

1.<sup>a</sup> Edição – Janeiro de 2020

---

António Monteiro  
Isabel Matos  
Virgínia Miranda

CADERNOS DE MATEMÁTICA Nº 11

# VARIÁVEL COMPLEXA

EDIÇÕES ORION



# Índice

Índice	v
Apresentação	vii
Introdução	ix
Capítulo 1	
Números Complexos	1
Capítulo 2	
Sucessões e Séries Complexas	79
Capítulo 3	
Funções Complexas de Variável Complexa	97
Capítulo 4	
Limites Continuidade e Derivada	119
Capítulo 5	
Integral	159
Capítulo 6	
Desenvolvimentos em Série	193
Capítulo 7	
Resíduos	221
Anexo 1	
Definições e Teoremas	259

Aneho 2	
Soluções dos exercícios propostos	283
Bibliografia	459

# Apresentação

## Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e a saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descuidar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente colecção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas a tratar nos assuntos que são tratados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e bem assim áreas de aplicação dos mesmos a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e conseqüentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente colecção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.

# Introdução

A Análise Complexa é o ramo da Análise Matemática que estuda as funções de variável complexa. A matéria, que em muitos sentidos estende e generaliza a Análise Real, encontra vastas aplicações, quer dentro da Matemática – nomeadamente nas áreas da Geometria Algébrica, da Teoria dos Números e em vários sectores da Matemática Aplicada – quer na Física – Hidrodinâmica, Termodinâmica, Mecânica Quântica, etc. – e na Engenharia – particularmente nos campos da Engenharia Nuclear, da Engenharia Aeroespacial, da Engenharia Mecânica e da Engenharia Electrotécnica.

A criação e estruturação dos números complexos são geralmente atribuídas ao matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572), para resolver cabalmente problemas levantados pela aplicação da fórmula resolvente das equações algébricas de terceiro grau, obtida por Tartaglia durante a primeira metade do século XVI. O chamado Teorema Fundamental da Álgebra, datado de finais do século XVIII, viria a mostrar que qualquer polinómio de coeficientes complexos não constante tem todas as raízes no corpo dos números complexos, o qual é, por isso, algebricamente fechado.

O termo “imaginário” para qualificar os números construídos para servirem de raízes quadradas a números reais negativos foi introduzido por René Descartes (1596-1650), no ano de 1637, enquanto Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi responsável pelo uso da expressão “número complexo”.

Em 1748, Leonhard Euler (1707-1783) obteve a sua famosa fórmula

$$\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$$

Embora a ideia tivesse já surgido anteriormente, coube a Jean-Robert Argand (1768-1822) deixar o seu nome ligado à representação geométrica dos números complexos através dos pontos de um plano.

Os fundamentos da Análise Complexa viriam a resultar dos trabalhos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) e muitos outros, para além de Euler e Gauss.

É esse importante sector da Análise Matemática que nos propomos abordar, ainda que de forma meramente introdutória, no presente volume dos Cadernos de Matemática, explorando os aspectos essenciais do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral para funções de variável complexa, assim como a questão dos desenvolvimentos em série.

Como sempre, a boa compreensão dos assuntos estudados exige um considerável desembaraço na utilização de conceitos e propriedades, que só se consegue com persistência e trabalho, nomeadamente através da resolução dos numerosos exercícios práticos que ilustrem as noções apresentadas.

O presente livro, como outros já publicados na mesma colecção, pretende constituir, para os estudantes destes assuntos, um auxiliar onde encontrem diversos exercícios propostos, através dos quais possam exercitar-se e aferir a sua compreensão dos assuntos. O leitor deverá, naturalmente, procurar resolver por si mesmo as questões apresentadas, socorrendo-se das resoluções, que são sempre incluídas por extenso, caso lhe surjam dúvidas quanto ao melhor caminho a seguir.