

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 10

GEOMETRIA ANALÍTICA

CADERNOS DE MATEMÁTICA

- N.º 1 PRIMITIVAS
- N.º 2 SÉRIES
- N.º 3 LIMITES
- N.º 4 DERIVADAS
- N.º 5 INTEGRAIS
- N.º 6 MATRIZES
- N.º 7 VECTORES
- N.º 8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- N.º 9 TRIGONOMETRIA (No prelo)
- N.º 10 GEOMETRIA ANALÍTICA

O Autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

Título: CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 10 – GEOMETRIA ANALÍTICA

Autor: António Monteiro

Editor: Edições Orion
Apartado 7501
Alfragide
2721-801 Amadora
www.edorion.com

Capa: Joana Torgal | Canto Redondo

Ilustrações: A. Faria – Edição Electrónica Lda.

Arranjo gráfico e Fotocomposição: A. Faria – Edição Electrónica Lda.

Impressão e Acabamentos: Cafilesa, Venda do Pinheiro

ISBN: 978-972-8620-35-6

Depósito Legal n.º 444022/18

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito do Editor, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

1.^a Edição – Outubro de 2018

António Monteiro

CADERNOS DE MATEMÁTICA N.º 10

GEOMETRIA ANALÍTICA

EDIÇÕES ORION

Índice

Índice	v
Apresentação	vii
Capítulo 1	
Espaços Afins	1
Capítulo 2	
Produtos internos	55
Capítulo 3	
Espaços afins euclidianos	107
Capítulo 4	
Cônicas e Quádricas	167
4.1 Cônicas em \mathbb{R}^2	167
4.1.1 Mudança da base	170
4.1.2 Mudança da origem (translação do referencial)	175
1.º caso: Cônicas com centro	176
2.º caso: Cônicas sem centro	179
4.2 Quádricas em \mathbb{R}^3	184
4.2.1 Mudança da base	186
4.2.2 Mudança da origem (translação do referencial)	187
1.º caso: Quádricas com centro	188
2.º caso: Quádricas sem centro	194
Capítulo 5	
Geometria Diferencial	225

Anejo 1	
Espaços Vectoriais	245
Anejo 2	
Formulário	251
Anejo 3	
Soluções dos exercícios propostos	267
Bibliografia	383



Apresentação

Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e a saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descurar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente coleção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas a tratar nos assuntos que são tratados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e bem assim áreas de aplicação dos mesmos a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e conseqüentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente coleção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.



A Geometria é, como se sabe, um dos ramos mais importantes e mais antigos da Matemática, aprofundado já vários séculos antes da nossa era pelos mais importantes matemáticos da Grécia Clássica.

Os trabalhos de Euclides, nomeadamente os seus célebres *Elementos*, constituem, além do mais, a origem remota da moderna estruturação das diferentes áreas da Matemática, sob a forma de teorias axiomáticas que procuram garantir o rigor dos raciocínios desenvolvidos e permitir analisar a respectiva consistência lógica.

No entanto, no final do século XVI, o tipo de raciocínio e a metodologia utilizados no estudo da Geometria sofreu assinalável evolução, quando a identificação dos pontos de um plano ou do espaço tridimensional através de sistemas de coordenadas permitiu a utilização de processos algébricos e analíticos na resolução de problemas geométricos. No desenvolvimento dessa novel Geometria Analítica destacaram-se, como é bem sabido, nomes como os de René Descartes (1596-1650), principalmente, mas também de Pierre de Fermat (1601-1665) ou François Viète (1540-1603), entre outros.

O presente volume dos Cadernos de Matemática propõe-se, justamente, abordar diversos conceitos da Geometria e mais precisamente da Geometria Analítica, de um ponto de vista moderno e como aplicação directa de muitas noções fundamentais da Álgebra Linear.

Para o efeito, é introduzido o conceito de espaço afim e dos correspondentes subespaços afins, posteriormente enriquecido pela introdução de um produto escalar. Dessas noções bastante elementares resulta o desenvolvimento de uma teoria que abrange o estudo rigoroso de rectas e planos, mas também a resolução de problemas métricos (definição e cálculo de distâncias e de ângulos) e ainda a classificação de cónicas e quádricas. No final, é ainda feita uma brevíssima introdução ao campo da Geometria Diferencial.

Como sempre, a boa compreensão dos assuntos estudados exige um considerável desbarraço na utilização de conceitos e propriedades, que só se consegue com persistência e trabalho, nomeadamente através da resolução dos numerosos exercícios práticos que ilustrem as noções apresentadas.

O presente livro, como outros já publicados na mesma colecção, pretende constituir, para os estudantes destes assuntos, um auxiliar onde encontrem diversos exercícios propostos, através dos quais possam exercitar-se e aferir a sua compreensão dos assuntos. O leitor deverá, naturalmente, procurar resolver por si mesmo as questões apresentadas, socorrendo-se das resoluções, que são sempre incluídas por extenso, caso lhe surjam dúvidas quanto ao melhor caminho a seguir.

