

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 8

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

CADERNOS DE MATEMÁTICA

N.º 1 PRIMITIVAS

N.º 2 SÉRIES

N.º 3 LIMITES

N.º 4 DERIVADAS

N.º 5 INTEGRAIS

N.º 6 MATRIZES

N.º 7 VECTORES

N.º 8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Os Autores escrevem de acordo com a antiga ortografia.

Os Autores agradecem à Prof.ª Maria Adelaide Carreira, amiga de longa data, a colaboração prestada para a preparação do presente volume.

Título: CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 8 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Autor: António Monteiro e Virgínia Miranda

Editor: Edições Orion
Apartado 7501
Alfragide
2721-801 Amadora
www.edorion.com

Capa: Joana Torgal | Canto Redondo

Ilustrações: A. Faria – Edição Electrónica Lda.

Arranjo gráfico e Fotocomposição: A. Faria – Edição Electrónica Lda.

Impressão e Acabamentos: Cafileisa, Venda do Pinheiro

ISBN: 978-972-8620-33-2

Depósito Legal n.º 436147/18

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito do Editor, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

1.ª Edição – Janeiro de 2018

António Monteiro
Virgínia Miranda

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 8

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

EDIÇÕES ORION

Índice

Índice	v
Apresentação	vii
Capítulo 1	
Introdução	1
Capítulo 2	
Equações diferenciais de primeira ordem	9
2.1 Equações diferenciais lineares de primeira ordem.....	9
2.2 Equações diferenciais de variáveis separáveis	20
2.3 Equações diferenciais homogêneas.....	33
2.4 Equações diferenciais exactas	46
2.5 Equações de Bernoulli.....	67
Capítulo 3	
Equações diferenciais lineares de ordem superior à primeira	85
Capítulo 4	
Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem	131

Capítulo 5	
Exemplos de aplicação	165
 Anexo 1	
Transformada de Laplace	191
 Anexo 2	
Formulário	197
 Anexo 3	
Soluções dos exercícios propostos	207
 Bibliografia	361

Apresentação

Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e a saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descuidar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente colecção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas a tratar nos assuntos que são tratados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e bem assim áreas de aplicação dos mesmos a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e consequentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente colecção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.



Para além dos desenvolvimentos da Matemática Pura por si mesma, têm, como é evidente, o máximo interesse as suas aplicações a outras ciências, incluindo a Física, a Economia, etc. A interacção de tais áreas com a Matemática é de sentido duplo, pois não só o avanço da Matemática fornece os instrumentos indispensáveis para um tratamento rigoroso dessas ciências, mas também são muitas vezes as necessidades destas que motivam e orientam as direcções em que os estudos matemáticos se desenvolvem. Não admira por exemplo que muitos dos grandes matemáticos da História das Ciências fossem também físicos eminentes.

Essa interacção entre diferentes ramos do conhecimento humano é particularmente bem espelhada no estudo das equações diferenciais, cujas aplicações práticas se podem mostrar com relativa facilidade. Por esse motivo, incluímos no presente volume um capítulo dedicado justamente a apresentar várias dessas aplicações, a diferentes campos científicos, que permitem pôr em prática os conceitos e técnicas anteriormente desenvolvidos.



Apesar do seu carácter elementar e introdutório, para se compreenderem os assuntos tratados no presente livro é indispensável um domínio prévio de diversos assuntos, como o Cálculo Diferencial (para funções de uma e de várias variáveis), o Cálculo de Primitivas e os rudimentos do Cálculo Integral, o Cálculo Matricial e alguns elementos de Álgebra Linear.

Todos estes assuntos, ao nível requerido, se podem encontrar noutros volumes desta mesma colecção, em geral devidamente assinalados no texto e constantes da Bibliografia incluída no final.

Para se compreender e dominar estes tópicos – tal como a generalidade dos tópicos da Matemática –, não basta ler e compreender as definições e principais teoremas. Há que ganhar um considerável desembaraço na utilização de umas e outros, o que só se consegue com persistência e trabalho, nomeadamente através do tratamento de exercícios práticos. É por esse motivo que neste volume – como noutros da mesma colecção – a exposição da teoria é acompanhada a par e passo pela apresentação de um grande número de exercícios, de dificuldade variável, todos integralmente resolvidos.

