

ANTÓNIO ROBALO

Com a colaboração de  
Maria do Carmo Botelho

# ESTATÍSTICA

## EXERCÍCIOS

Volume II  
DISTRIBUIÇÕES  
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

6<sup>a</sup> Edição

Revista e Aumentada



EDIÇÕES SÍLABO



# **ESTATÍSTICA**

## **EXERCÍCIOS**

**VOL. 2**

**DISTRIBUIÇÕES  
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA**

**ANTÓNIO ROBALO**

com a colaboração de  
**Maria do Carmo Botelho**

*EDIÇÕES SÍLABO*

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, esta obra. As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor. Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos. O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede  
[www.silabo.pt](http://www.silabo.pt)

**FICHA TÉCNICA:**

Título: Estatística – Exercícios – Vol. 2  
Autor: António Robalo  
© Edições Sílabo, Lda.  
Capa: Pedro Mota  
1ª Edição – Lisboa, 1986  
6ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2018  
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.  
Depósito Legal: 430162/17  
ISBN: 978-972-618-936-7

 **EDIÇÕES SÍLABO, Lda.**  
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo  
R. Cidade de Manchester, 2  
1170-100 Lisboa  
Telf.: 218130345  
e-mail: [silabo@silabo.pt](mailto:silabo@silabo.pt)  
[www.silabo.pt](http://www.silabo.pt)

*O livro que se apresenta agora em 6ª edição teve ao longo dos anos uma aceitação notável, com várias edições e reimpressões, sinal de que terá sido útil a todos os que se confrontam com a aprendizagem da Estatística. Cumpriu assim o seu objectivo.*

*Nesta nova edição manteve-se a estrutura do livro, tendo-se acrescentado em cada capítulo um breve resumo teórico e alguns novos exercícios no capítulo de Inferência Estatística – Ensaio de Hipóteses.*

*Agradeço à minha colega, Prof.ª Maria do Carmo Botelho, a colaboração nas alterações verificadas, e ter assim contribuído para que esta nova edição fosse possível.*

*A todos os leitores e utilizadores, espero que o livro continue a ser uma preciosa ajuda nos seus estudos e preparação para as provas que tenham que prestar.*

*António Robalo*



# ÍNDICE

<b>1. DISTRIBUIÇÕES – Variáveis Aleatórias Discretas</b>	
Conceitos Base	9
Enunciados	15
Resoluções	31
<b>2. DISTRIBUIÇÕES – Variáveis Aleatórias Contínuas</b>	
Conceitos Base	49
Enunciados	55
Resoluções	73
<b>3. INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – Distribuições Amostrais e Estimação Pontual</b>	
Conceitos Base	97
Enunciados	101
Resoluções	117
<b>4. INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – Intervalos de Confiança</b>	
Conceitos Base	141
Enunciados	147
Resoluções	163
<b>5. INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – Ensaio de Hipóteses</b>	
Conceitos Base	197
Enunciados	221
Resoluções	263
<b>6. ANEXOS</b>	367





**1**

# **DISTRIBUIÇÕES**

**Variáveis Aleatórias Discretas**

**CONCEITOS BASE**



## Distribuição uniforme

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta de domínio  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Considera-se que  $X$  segue uma distribuição Uniforme nos  $N$  pontos  $x_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, N$  se e só se a função de probabilidade de  $X$  for dada como

$$f(x_j) = \frac{1}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

A correspondente função distribuição da variável  $X$  vem

$$F(X) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x_j}{N} & x_i \leq x < x_{i+1}, x_i = 1, 2, \dots, N-1 \\ 1 & x \geq N \end{cases}$$

O valor esperado e a variância de  $X$  são dados respetivamente por

$$E[X] = \frac{N+1}{2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{N^2-1}{12}$$

## Distribuição de Bernoulli

### Prova de Bernoulli

Experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis:  $A$  – sucesso e  $\bar{A}$  – insucesso, com probabilidades respetivamente de  $P[A] = p$  e  $P[\bar{A}] = 1 - p = q$ .

Diz-se que  $X$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Bernoulli,  $X \sim B(1; p)$ , quando a sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = x] = f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad (0 \leq p \leq 1).$$

A função de distribuição de  $X$  é traduzida pela expressão

$$P[X \leq x] = F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Numa distribuição de Bernoulli, o valor esperado e a variância de  $X$  são dados por

$$E[X] = p, \quad \text{Var}[X] = p \cdot (1-p)$$

## Distribuição binomial

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com distribuição binomial,  $X \sim B(x; n; p)$ , possível de identificar como  $X$  – número de sucessos numa sequência de  $n$  provas de Bernoulli. A função de probabilidade de  $X$  é dada por

$$P[X = x] = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

com  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $0 \leq p \leq 1$ .

A função distribuição surge como

$$P[X \leq x] = F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{x_i=0}^x \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} & 0 \leq x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

a variável aleatória contínua tem como contradomínio um conjunto infinito não numerável de valores.

O valor esperado e a variância de uma variável  $X$  com distribuição binomial podem determinar-se como

$$E[X] = n \cdot p, \quad \text{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

### Teorema: Aditividade da distribuição binomial

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias discretas, em que  $X_1 \sim B(n_1; p)$  e  $X_2 \sim B(n_2; p)$ , então  $X_1 + X_2 \sim B(n; p)$ , com  $n = n_1 + n_2$ .

## Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson está associada a uma contagem, cujo processo aproximado, de parâmetro  $\lambda > 0$ , verifica as seguintes condições:

- i) O número de eventos que ocorrem em intervalos não sobrepostos são variáveis aleatórias independentes.
- ii) A probabilidade de existir apenas um evento em qualquer intervalo de tempo de amplitude  $\Delta t$  aleatoriamente pequena é de cerca  $\lambda \Delta t$ .
- iii) A probabilidade de se verificarem dois ou mais eventos em qualquer intervalo de tempo de amplitude  $\Delta t$  aleatoriamente pequena é aproximadamente zero.

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com distribuição de Poisson,  $X \sim P(x; \lambda)$ , a sua função de probabilidade é definida como

$$P[X = x] = f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots (\lambda > 0).$$

O valor esperado e a variância para uma distribuição de Poisson são dados como

$$E[X] = \lambda, \quad \text{Var}[X] = \lambda.$$

### **Teorema: Aditividade da distribuição de Poisson**

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias discretas, em que  $X_1 \sim P(\lambda_1)$  e  $X_2 \sim P(\lambda_2)$ , então  $X_1 + X_2 \sim P(\lambda)$ , com  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

### **Teorema: Aproximação da distribuição binomial à distribuição de Poisson**

A distribuição binomial converge para a distribuição de Poisson quando  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$ , considerando  $\lambda = n \cdot p$ .



# 1

## DISTRIBUIÇÕES

Variáveis Aleatórias Discretas

ENUNCIADOS





**EXERCÍCIO****1**

Uma empresa comercializa garrafas de vinho do Porto de 1 litro. Supõe-se no entanto que 40% dessas garrafas, contém realmente uma menor quantidade de líquido do que o volume indicado no rótulo.

Tendo adquirido 6 dessas garrafas, qual a probabilidade de:

- a) Duas delas conterem menos de um litro?
- b) No máximo 2 conterem menos de um litro?
- c) Pelo menos 2 conterem menos de um litro?
- d) Todas conterem menos de um litro?
- e) Todas conterem o volume o volume indicado no rótulo?
- f) Represente a função de probabilidade de V.A. em questão.
- g) E qual a probabilidade de nas 100 garrafas existentes num supermercado, haver não mais de 30 com volume inferior ao indicado no rótulo?

**EXERCÍCIO****2**

Qual a probabilidade de, em 10 lançamentos de um dado perfeito:

- a) Se obterem 5 faces par.
- b) Se obterem 5 faces superiores a 4.

**EXERCÍCIO****3**

Represente graficamente a função de probabilidade de cada uma das variáveis com distribuição binomial, identificadas pelos seguintes valores dos parâmetros  $n$  e  $p$ :

- a)  $n = 5$       $p = 0,5$
- b)  $n = 5$       $p = 0,25$
- c)  $n = 5$       $p = 0,05$
- d)  $n = 5$       $p = 0,75$
- e)  $n = 20$      $p = 0,5$
- f)  $n = 20$      $p = 0,25$
- g)  $n = 20$      $p = 0,05$

**EXERCÍCIO****4**

Suponha que  $X$  tem distribuição binomial, com parâmetros  $n$  e  $p$ ; sabendo que  $E[X] = 5$  e  $VAR[X] = 4$ , determine  $n$  e  $p$ .

**EXERCÍCIO****5**

Admite-se ser de 0,4 a probabilidade de que um cliente que entre no supermercado  $M$ , realize despesa superior a 200€.

- a) Qual a probabilidade de, em 3 clientes:
- nenhum realizar despesas superior a 200€?
  - no mínimo, 2 gastarem mais de 200€?
- b) Qual a probabilidade de, em 15 clientes:
- nenhum realizar despesa superior a 200€?
  - no mínimo 2 gastarem mais de 200€?

**EXERCÍCIO****6**

Um estudante tem 3 exames. A probabilidade de ficar bem em cada um é de  $\frac{1}{2}$ . Calcule a probabilidade de ficar bem,

- a) em pelo menos 1 exame.  
b) em exactamente 1 exame.

**EXERCÍCIO****7**

Se for estimada em 0,3 a probabilidade de uma pessoa contactada realizar uma compra, calcule a probabilidade de um vendedor que visita num dia 6 pessoas:

- a) realizar 5 vendas.  
b) realizar entre 4 e 8 vendas.  
c) realizar quanto muito 2 vendas.  
d) realizar no máximo 10 vendas.  
e) realizar pelo menos 12 vendas.  
f) realizar no mínimo 3 vendas.

nas 16 pessoas visitadas pelo vendedor:

- g) 25% realizarem compras.
- h) Seja de 0,5 a proporção das que realizam compras.
- i) Continuando o vendedor a visitar 16 pessoas diariamente, qual o seu número médio diário de vendas?

---

**EXERCÍCIO**

**8**

Estima-se que 70% dos acidentes rodoviários, estejam relacionados, direta ou indiretamente com as más condições da rede rodoviária nacional.

Qual a probabilidade de em 8 acidentes,

- a) 5 estarem relacionados com o mau estado das estradas?
- b) entre 3 e 6 estarem relacionadas com o mau estado das estradas?

---

**EXERCÍCIO**

**9**

Um estudo encomendado pela empresa *M*, permitiu apurar que aproximadamente 60% dos seus trabalhadores mantinham uma atitude cooperativa face à empresa, 30% uma atitude hostil e 10% uma atitude não definida.

Qual a probabilidade de num grupo de 12 trabalhadores:

- a) Pelo menos 6 adotarem uma atitude hostil face à empresa?
- b) No mínimo 2 terem uma atitude bem definida?
- c) Qual o número esperado de trabalhadores com atitude hostil?

---

**EXERCÍCIO**

**10**

A máquina 1, produz (por dia), o dobro de peças que são produzidas pela máquina 2. No entanto, 6% das peças fabricadas pela máquina 1, tendem a ser defeituosas, enquanto somente 3%, o tendem a ser na máquina 2.

Qual a probabilidade de num lote de 10 peças extraídas ao acaso da produção total:

- a) Haver 2 peças defeituosas?
- b) Haver entre 2 e 5 (inclusive), peças defeituosas?
- c) Qual o número esperado de peças defeituosas num lote de 100?

**EXERCÍCIO****11**

Considere o lançamento de 1 moeda equilibrada.

Calcule a probabilidade de, em 6 lançamentos:

- Saírem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 coroas.
- Saírem no máximo 4 coroas.
- Qual o número esperado de coroas nos 6 lançamentos?
- Represente a função de probabilidade da V.A. em questão.

**R:** a) 0,0156; 0,0938; 0,2344; 0,3125; 0,2344; 0,0938; 0,0156.

b) 0,8906.

c) 3.

**EXERCÍCIO****12**

Uma agência de publicidade, afirma que 40% das donas de casa que recebem a visita de um vendedor de enciclopédia, acabam por encomendar uma.

De 12 donas de casa que recebem a visita do vendedor, qual a probabilidade de:

- No máximo 3 encomendarem a enciclopédia?
- No mínimo 5 encomendarem a enciclopédia?
- Se o vendedor numa semana, conseguir abordar 100 donas de casa, quantas enciclopédias espera ele vender?

**R:** a) 0,2254; b) 0,5618; c) 40.

**EXERCÍCIO****13**

Suponha que  $X$  tem distribuição binomial e que  $p = 0,2$  e  $E[X] = 1$ .

Calcule  $n$  e  $VAR[X]$ .

**R:**  $n = 5$ ;  $VAR[X] = 0,8$ .

# ESTATÍSTICA

## EXERCÍCIOS

Volume II  
DISTRIBUIÇÕES  
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

**António Robalo**

Professor Catedrático  
ISCTE Business School – ISCTE-IUL

**Maria do Carmo Botelho**

Professora Auxiliar  
Escola de Sociologia e Políticas Públicas – ISCTE-IUL  
Investigadora CIES-IUL

Exercícios propostos e resolvidos. O cuidado posto na selecção e apresentação dos exercícios faz deste livro um elemento indispensável a uma boa compreensão e consolidação dos conhecimentos teóricos adquiridos.

As resoluções encontram-se explicadas passo a passo e com o respectivo enquadramento teórico.

Sínteses teóricas em todos os capítulos constituem uma mais valia adicional nesta sexta edição.

