6

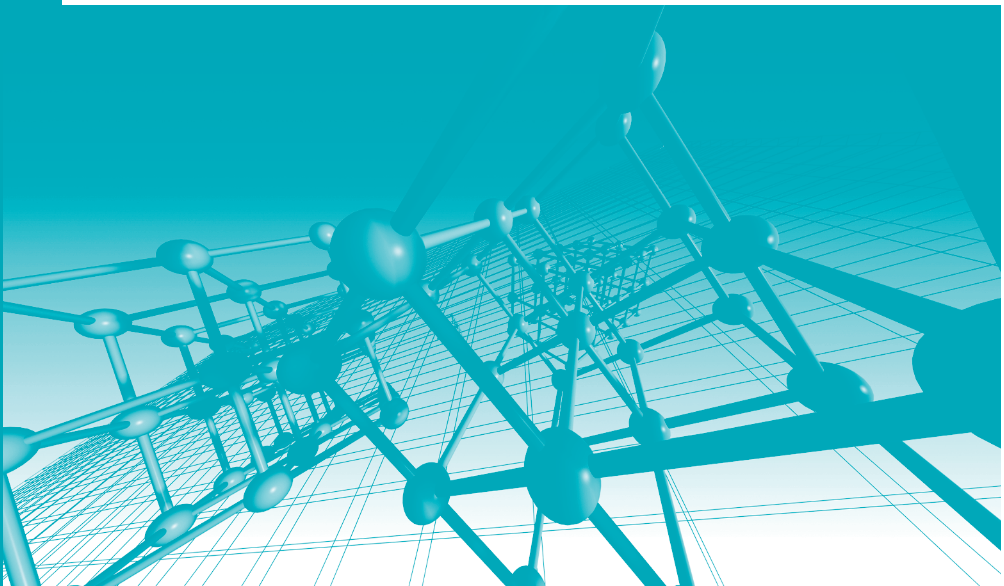
MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

ESPAÇOS VECTORIAIS
GEOMETRIA ANALÍTICA

Vol. 2

MANUEL ALBERTO M. FERREIRA – ISABEL AMARAL



4ª Edição

Colecção Matemática

EDIÇÕES SÍLABO

COLECÇÃO MATEMÁTICA

6

COLEÇÃO MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

Vol. 2

MANUEL ALBERTO M. FERREIRA
ISABEL AMARAL

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede
www.silabo.pt

Editor: Manuel Robalo

FICHA TÉCNICA:
Título: Álgebra Linear – Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
Autores: Manuel Alberto M. Ferreira, Isabel Amaral

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, 1990
4ª Edição – Lisboa, Setembro de 2017
Impressão e acabamentos: Cafilesa – Soluções Gráficas, Lda.
Depósito Legal: 66127/93
ISBN: 978-972-618-911-4

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345; Fax: 218166719
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

ESPAÇOS VECTORIAIS

GEOMETRIA ANALÍTICA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

Espaços vectoriais

1. Espaço vectorial

Considere-se um conjunto $E = \{e, f, g, \ldots, u, v, \ldots\}$ e um corpo $K = \{\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots\}$.

Diz-se que E constitui um Espaço Vectorial ou Espaço Linear sobre o corpo K se:

1. Está definida em E uma operação binária a que chamaremos adição ($E^2 \underset{+}{\to} E$) gozando das seguintes propriedades:

   a) **Associatividade**

   $$f + (g + h) = (f + g) + h, \quad \underset{f,g,h \in E}{\forall}$$

   b) **Comutatividade**

   $$f + g = g + f, \quad \underset{f,g \in E}{\forall}$$

   c) **Elemento neutro**

   Há um (apenas um) elemento em E (0: zero) tal que $f + 0 = 0 + f = f, \underset{f \in E}{\forall}$

   d) Dado um elemento qualquer de E, f, existe outro, $-f$ também pertencente a E (simétrico a f), tal que $f + (-f) = (-f) + f = 0$.

2. Define-se uma operação que a cada elemento de $K \times E$ faz corresponder um de E, a que chamaremos multiplicação ($K \times E \to E$), que goza das seguintes propriedades:

   a) **Distributividade em relação à adição de *E***

   $$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g, \quad \underset{f,g \in E}{\forall}, \underset{\lambda \in K}{\forall}$$

   b) **Distributividade em relação à adição de *K***

   $$(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f, \quad \underset{f \in E}{\forall} \quad \underset{\lambda,\mu \in K}{\forall}$$

   c) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f, \quad \underset{f \in E}{\forall} \quad \underset{\lambda,\mu \in K}{\forall}$

   d) $1f = f, \underset{f \in E}{\forall}$ (representamos por 1 a unidade de K).

Os elementos de E chamam-se **vectores** e os de K **escalares**.

Note-se que a adição definida atrás respeita apenas a elementos de E, enquanto que a multiplicação é uma operação híbrida porque exige dois elementos de características diferentes: um escalar e um vector.

Um exemplo de Espaço Vectorial sobre o corpo dos números reais é o de todas as sequências ordenadas de números reais (IR^n), de n elementos: (a_1, a_2, ..., a_n) (n qualquer). Os escalares são números reais e os vectores serão da forma (a_1, a_2, ..., ..., a_n) sendo a_1, a_2, ..., a_n números reais.

Definir-se-á a adição entre sequências de n números reais do seguinte modo:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Por outro lado, o produto de um escalar (número real) por um vector (sequência ordenada de n números reais) será

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Facilmente se verifica que estas operações gozam das propriedades indicadas atrás.

Outro espaço vectorial, também sobre o corpo dos números reais, é aquele em que os vectores são as matrizes de números reais de um mesmo tipo $m \times n$: $K_{m \times n}$.

Neste caso, um vector será um elemento do tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A adição entre vectores será a adição usual para matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

e o produto de um escalar por um vector o produto de um número real por uma matriz:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

satisfazendo, como facilmente se verificaria, as propriedades características dos espaços vectoriais.

Estes dois exemplos mostram a diversidade de formas que podem apresentar os elementos dos espaços vectoriais.

É costume representar um vector por uma letra minúscula encimada por uma seta. Por exemplo $\vec{f}$, $\vec{g}$, ...

Nos casos vistos atrás podíamos escrever, por exemplo:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Os corpos considerados são o corpo real, *IR*, e o corpo complexo, *C*. No primeiro caso temos espaços vectoriais reais e, no segundo caso, espaços vectoriais complexos.

1 Exercício resolvido

Mostre que o conjunto dos números complexos *C* constitui em espaço vectorial sobre o corpo real, ou seja: é um espaço vectorial real.

Resolução

Sendo um número complexo dado na forma $a + bi$ ($a, b \in IR$ e $i = \sqrt{-1}$) basta atentar nas definições seguintes:

a) Soma de dois complexos:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

b) Multiplicação de um complexo por um real:

$$\lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi,$$

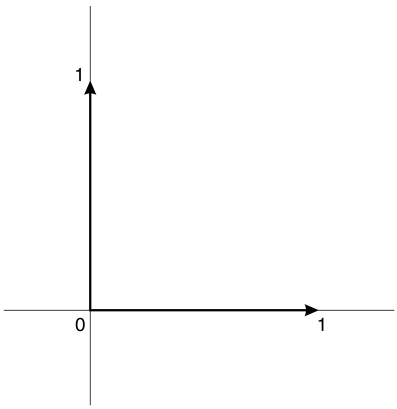
para concluir que um número complexo podia ser dado como um par ordenado (a, b) (a – parte real do complexo; b – coeficiente da parte imaginária) sendo as operações atrás definidas, idênticas às dadas no texto para sequências de números reais.

2 Exercício resolvido

Mostre que são espaços vectoriais sobre o corpo dos números reais:
a) O conjunto dos segmentos orientados do plano.
b) O conjunto dos segmentos orientados do espaço.

Resolução

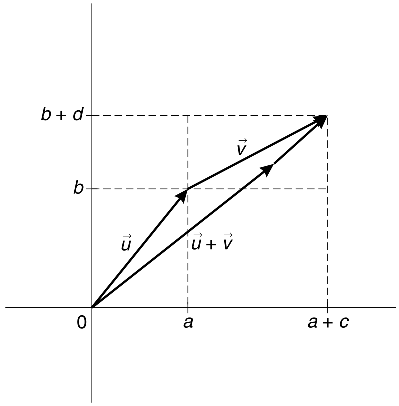
a) Comecemos por recordar que, estabelecendo no plano um sistema de eixos coordenados perpendiculares com origem em 0, cada um deles com segmentos orientados de comprimento 1



cada um dos segmentos pode ser representado por um par ordenado de números reais (a, b) sendo a e b chamados as suas coordenadas.

Poremos, então, por definição:

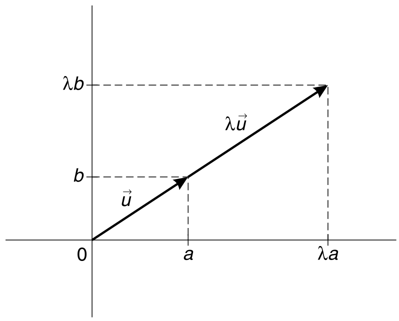
a_1) Soma de segmentos orientados:



Portanto, somam-se segmentos orientados fazendo a extremidade de um coincidir com a origem do outro. O segmento soma obtém-se, então, unindo origem do primeiro com a extremidade do segundo.

Percebe-se, examinando a figura anterior, que se o primeiro é dado por um par ordenado (a, b) e o segundo por outro, (c, d), o segmento soma é dado, também, por um par ordenado $(a + c, b + d)$.

a_2) Produto de um segmento orientado por um número real:



Isto é: o produto de um segmento orientado por um número real é um segmento orientado com a mesma direcção do inicial, de comprimento igual ao do segmento inicial multiplicado pelo módulo do número real dado e com o mesmo sentido ou sentido contrário conforme o número real seja positivo ou negativo.

Resulta, assim (ver figura anterior), que sendo um segmento orientado dado por um par ordenado (*a*, *b*) o seu produto, por um real λ, vem também dado por um par ordenado $(\lambda a, \lambda b)$.

Mais uma vez caímos na analogia indicada no exemplo anterior.

b) Esta alínea é idêntica à anterior, só que temos, agora, que considerar três eixos coordenados perpendiculares com origem em 0 (e não apenas dois) cada um deles com um segmento orientado de comprimento 1.

Os segmentos orientados são, portanto, dados por ternos ordenados de números reais (*a*, *b*, *c*), definindo-se as operações de forma idêntica às de *a)* e estabelecendo-se, também, analogias idênticas.

2. Alguns conceitos em espaços vectoriais

Seja um espaço vectorial *E* sobre um corpo *K*. Consideremos um conjunto de *m* vectores de *E*, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m\}$.

Uma expressão do tipo

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{e}_m \ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in K)$$

diz-se combinação linear dos vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$.

Há várias combinações de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ (mesmo infinitas se o cardinal de *K* for infinito) sendo cada uma delas um vector.

Os vectores, gerados por combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ constituem um subespaço de *E*, isto é: o seu conjunto está contido em *E*, e é um espaço vectorial sobre o mesmo corpo e com as mesmas operações.

O menor de todos os subespaços de *E* que contém os vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ diz-se subespaço gerado por $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$.

Se esse subespaço coincide em *E*, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ dizem-se um sistema de geradores do espaço.

Por outro lado, os vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_m$ dizem-se linearmente dependentes se uma sua combinação linear gerar o vector nulo ($\vec{0}$) com pelo menos um dos escalares não nulo. Caso contrário dizem-se linearmente independentes.

Um conjunto de geradores dum espaço vectorial, linearmente independentes, diz-se base do espaço.

Consideremos, de novo, uma sequência ordenada de n números reais (a_1, a_2, ..., a_n). Ela pode pôr-se na forma

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 (1, 0, \ldots, 0) + a_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

Está, assim, escrita como combinação linear dos vectores (1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1), sendo os escalares a_1, a_2, ..., a_n (números reais).

Facilmente se compreende que qualquer sequência ordenada de n números reais se pode escrever como combinação linear desses vectores que, por sua vez, são linearmente independentes. Assim (1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) constituem uma base do espaço vectorial das sequências ordenadas de n números reais sobre o corpo *IR*.

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \ldots + a_{1n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \ldots + a_{2n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{m2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \ldots + a_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{m2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

está escrita como combinação de $m \times n$ matrizes do tipo $m \times n$ em que apenas um dos seus elementos é significativo (e igual a 1).

Essas $m \times n$ matrizes geram, por combinação linear, qualquer elemento do espaço vectorial $K_{m \times n}$ sobre o corpo real e são linearmente independentes, constituindo uma base do referido espaço.

Um espaço vectorial diz-se de dimensão n quando contém uma base com n elementos.

Portanto, dado um espaço vectorial e determinada uma sua base, qualquer vector dele fica identificado pela indicação dos escalares que intervêm na combinação linear que o define. Nos exemplos que temos visto: a_1, a_2, ..., a_n ou a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ..., a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}.

Esses escalares chamam-se coordenadas do vector na referida base.

Como é evidente, o espaço vectorial das sequências ordenadas de n números reais, sobre o corpo real, tem dimensão n e qualquer elemento seu necessita de n coordenadas para ser expresso numa certa base.

O espaço vectorial das matrizes reais de um mesmo tipo $m \times n$ sobre o corpo real é de dimensão $m \times n$ e qualquer elemento seu necessita de $m \times n$ coordenadas para ser expresso numa certa base.

Note-se para acabar esta secção, que qualquer vector $\vec{v}$ de um espaço vectorial de dimensão n, só pode ser expresso de um único modo numa base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$.

Suponhamos que se tinha

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$$

e

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n .$$

Seria, então,

$$\vec{0} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\vec{e}_n .$$

Mas, sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ linearmente independente, $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ..., $\alpha_n - \beta_n = 0$ donde $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$, o que prova que $\vec{v}$ só se pode exprimir de um único modo na base dada.

1 Exercício resolvido

Indique bases para:

a) O espaço vectorial *C* sobre *IR*;

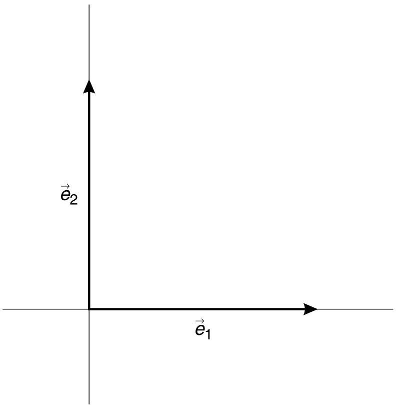
b) O espaço vectorial dos segmentos orientados do plano, sobre IR;

c) O espaço vectorial dos segmentos orientados do espaço, sobre IR.

Resolução

a) Basta notar que $a + bi = a(1 + oi) + b(0 + li)$ pelo que os vectores $\vec{e}_1 = 1$ e $\vec{e}_2 = i$ constituem uma base do espaço indicado. Na notação de pares ordenados podia escrever-se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

b) Recorrendo, de novo, a uma representação geométrica



vê-se que os segmentos de comprimento 1, $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$, e origem de 0 (perpendiculares entre si) constituem uma base do espaço vectorial em causa. Em notação de par ordenado teríamos: $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$. De facto, se $u = (a, b)$, temos $u = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

c) Neste caso, teríamos,

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

pelo que os segmentos orientados, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, de comprimento 1, e origem num ponto 0, perpendiculares entre si, constituem uma base do espaço vectorial dado.

2 Exercício resolvido

Mostre que o conjunto das sucessões reais convergentes é um espaço vectorial. Diga qual a sua dimensão.

Resolução

Basta notar que a soma de sucessões convergentes é uma sucessão convergente e que a multiplicação de uma sucessão convergente por um número real é ainda uma sucessão convergente, para concluir que o conjunto dado se pode estruturar como espaço vectorial real.

Uma sua base seria constituída por exemplo por sequências ordenadas de infinitos elementos (de número real ao cardinal de *IN*) sendo um deles 1 e todos os outros 0; o número dessas sequências seria também idêntico ao cardinal *IN*. Este espaço vectorial tem então dimensão infinita. Mais concretamente infinita numerável.

3 Exercício resolvido

Mostre que o conjunto das funções limitadas em [0, 1] é um espaço vectorial real. Diga qual a sua dimensão.

Resolução

Em relação à primeira parte da questão basta notar que a soma de funções limitadas e a multiplicação de funções limitadas por um número real, em [0, 1], é uma função limitada em [0, 1].

Uma base deste espaço seria constituída por elementos do tipo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{a\} \end{cases}, \quad a \in [0, 1]$$

Outros livros Sílabo na área dos Métodos Quantitativos:

Estatística – Exercícios Vol. 1 – Probabilidade, Variáveis aleatórias
Estatística – Exercícios Vol. 2 – Distribuições, Inferência estatística
Estatística Aplicada – Vol. 1
Estatística Aplicada – Vol. 2
Exercícios Estatística Aplicada – Vol. 1
Exercícios Estatística Aplicada – Vol. 2
Estatística Matemática – Vol. 1
Estatística Matemática – Vol. 2
Exercícios de Estatística – Vol. 1
Exercícios de Estatística – Vol. 2
Análise Estatística com utilização do SPSS
Estatística Multivariada Aplicada
Estatística Descritiva
Análise Multivariada de Dados Qualitativos – Utilização da HOMALS
Análise de Dados para Ciências Sociais
Métodos Quantitativos para as Ciências Sociais
Exercícios de Métodos Quantitativos para as Ciências Sociais
Exercícios de Estatística Descritiva para as Ciências Sociais
Estatística para Economia e Gestão
Matemática para Economia e Gestão em 11 Lições
Investigação Operacional – Vol. 1
Investigação Operacional – Vol. 2
Sondagens
Tabelas Estatísticas
Convite à Matemática
Formulário de Estatística
Formulário de Física
Investigação por Questionário
SPSS – Guia Prático de Utilização
Descobrindo a Regressão – Com a Complementaridade do SPSS

20
ISBN 978-972-618-911-4
9 789726 189114

6 COLECÇÃO MATEMÁTICA